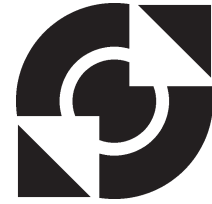


# Afdeling Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : TW2008/AAMP/32GDV/avdm&cs  
Versie : 20 juni 2008



Universiteit Twente

Vak : **Gewone differentiaalvergelijkingen**  
Vakcode : 156012

Datum : maandag 23 juni 2008  
Tijdstip : 09:00 – 12:00 uur  
Plaats : Sportcentrum

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

1. (a) Los het volgende beginwaardeprobleem op

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{3x}, \quad x(0) = -1$$

(b) Bepaal het existentieinterval van de oplossing.

2. Gegeven  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ ;  
(b) Bereken  $e^{At}$ .

*Aanwijzing:* Gebruik dat  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(c) Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

3. Gegeven is het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x(8 - 4x - y) \\ y' &= -y(y - 3 + x^2 - 2x) \end{aligned}$$

- (a) Bepaal de nullclines en evenwichtspunten. Teken de nullclines in het vlak.  
(b) Analyseer met behulp van de nullclines het gedrag van de oplossingen met beginwaarden in het gebied  $x, y \geq 0$ .  
(c) Lineariseer het stelsel rond het evenwichtspunt  $(1, 4)$ .  
(d) Teken het faseplaatje van het gelineariseerde stelsel rond het evenwichtspunt  $(1, 4)$ .

**Z.O.Z**

4. Gegeven is het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= 4y + 4 \\y' &= -2x + 4\end{aligned}$$

Bepaal een behouden grootte voor dit stelsel.

5. Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x - y^3\end{aligned}$$

- (a) Gebruik de positief definitieve functie  $V(x, y) = x^2 + y^2$  om te laten zien dat de oorsprong stabiel is.
- (b) Bewijs dat alle oplossingen met beginpunt in de eenheidscirkel een niet-lege limietverzameling hebben.
- (c) Bewijs dat alle oplossingen met beginpunt in de eenheidscirkel naar de oorsprong convergeren.

6. We bekijken het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= -4y + x - x^3 - xy^2 \\y' &= x.\end{aligned}$$

- (a) Schets de verzameling

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 16\}.$$

- (b) Laat zien dat de verzameling  $U$  positief invariant is.
- (c) Laat zien dat het bovengenoemde stelsel een periodieke oplossing heeft.

**Normering:**

1a : 3	2a : 2	3a : 3	4 : 3	5a : 2	6a : 1
b : 1	b : 3	b : 3		b : 2	b : 2
	c : 1	c : 1		c : 2	c : 4
		d : 3			

**Totaal:**  $36 + 4 = 40$  punten