Kenmerk:
Datum: 3 april 2008

Tentamen Kansrekening (153037)
vrijdag 11 april 2008 van 9.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje

1. In een zeker land bezit 90% van alle huishoudens tenminste één mobiele telefoon. Bij 80% van de huishoudens met een mobiele telefoon is ook een computer aanwezig. Tenslotte is bekend dat slechts 10% van de huishoudens zonder mobiele telefoon in het bezit is van een computer.

   a. Hoe groot is de kans dat in een huishouden noch een computer noch een mobiele telefoon aanwezig is?

   b. Hoe groot is de kans dat in een huishouden met een computer geen mobiele telefoon aanwezig is?

2. De stochastische variabelen X en Y bezitten een simultane kansdichtheid f met $f(x, y) = 0$ als $x < 0$ of $y < 0$ en

$$f(x, y) = xe^{-x(y+1)}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

   a. Bepaal de marginale kansdichtheid van X.

   b. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van Y gegeven $X = x$ voor $x \geq 0$.

   c. Bepaal de kansdichtheid van $Z = XY$.

3. De stochastische variabele X stelt het aantal successen voor in een reeks van n onafhankelijke herhalingen van eenzelfde experiment met een kans p op succes. X heeft dus een binomiale verdeling met parameters n en p.

   a. Bepaal $P(X > 1)$.

   b. Laat zien dat de momentgenererende functie van X gegeven wordt door $\phi(t) = (pe^t + 1 - p)^n$.

   c. Bereken $E(X)$ en $\text{var}(X)$ met behulp van de momentgenerende functie.

4. Een zekere brug kan maximaal een gewicht dragen van 1000 kg. De gewichten van n personen worden gerepresenteerd door de (onderling onafhankelijke) stochastische variabelen $X_1, \ldots, X_n$. De stochastische variabele $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht van de groep.

   Veronderstel dat het gewicht van een willekeurig persoon normaal is verdeeld met een verwachting van 75 (kg.) en een variantie van 100 (kg.^{2}).

a. Geef de kansverdeling van $\bar{X}$.

b. Bepaal (met behulp van de tabel) de kans dat de brug breekt als er zich 12 mensen op de brug begeven.

Stel nu dat het gewicht van een willekeurig persoon uniform verdeeld is op het interval $[a, b]$.

c. Bepaal a en b zodanig dat $E(X_1) = 75$ en var(X_1)= 100.

d. Veronderstel dat a en b zijn zoals in onderdeel c. Gebruik de Centrale Limietstelling en de tabel om te bepalen hoeveel personen er maximaal op de brug mogen opdat de kans dat de brug breekt kleiner is dan 0.001.

5. Laat X een exponentieel verdeelde stochastische variabele zijn met verwachtingswaarde $1/\lambda$. De stochastische variabele Y heeft gegeven $X = x$ een Poisson-verdeling met parameter μx, d.w.z.

$$P(Y = k \,|\, X = x) = e^{-\mu x}\,\frac{(\mu x)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

a. Bepaal $P(Y = k)$ voor $k = 0, 1$.

b. Geef de voorwaardelijke verwachting van Y gegeven $X = x$.

c. Geef de verwachtingswaarde van Y.

d. Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven $Y = 0$.

6. De stochastische variabelen X en Y zijn onderling onafhankelijk en beide exponentieel verdeeld met verwachtingswaarden a en b, respectievelijk. Zij $V = \min(X, Y)$ en $W = \max(X, Y)$

a. Laat zien dat V exponentieel is verdeeld en geef $E(V)$ en var(V).

b. Bepaal $P(W = X)$.

c. Bepaal $E(W)$.

Normering:

1		2			3			4				5				6		
a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2

Eindcijfer: $\frac{\text{Totaal}}{36} \times 9 + 1$ (afgerond)