Tentamen Lineaire Algebra voor TW (152121)
dinsdag 2 november 2010; 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.

1. Gegeven is een lineair systeem:

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +5x_5 & = 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +\beta x_5 & = \alpha \end{cases}$$

a) [3pt] Voor welke waarde(n) van α en β is dit systeem consistent? (Bepaal alle mogelijke waarden).

b) [2pt] Neem $\alpha = \beta = 9$. Los het systeem op. Schrijf de oplossing in een parametrische vector-vorm. Geef een meetkundige interpretatie.

2. Laat $\mathbb{P}_n$ een vectorruimte zijn van polynomen met hoogste macht niet groter dan n.

a) [2pt] Definieer een tranformatie $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ als $T(\mathbf{p}(x)) = \mathbf{p}'(x)$ voor $\mathbf{p}(x) \in \mathbb{P}_3$. Laat zien dat T een lineaire transformatie is.

b) [2pt] Laat W een verzameling zijn van alle polynomen $\mathbf{p}(x)$ in $\mathbb{P}_3$ met beeld x^2 onder T. Is W een deelruimte van $\mathbb{P}_3$? Waarom wel/niet?

3. [3pt] Bewijs de volgende stelling. *Een verzameling van twee of meer vectoren $S = \{v_1, \dots v_p\}$ in een vectorruimte V is lineair afhankelijk dan en slechts dan als tenminste één van de vectoren in S een lineaire combinatie is van de anderen.*

4. a) [3pt] Bereken een inverse van $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

b) [1pt] Neem $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 1 \\ a-d & b-e & c-1 \end{bmatrix}$. Bepaal voor alle waarden van de parameters det A.

c) [2pt] In b), bepaal voor alle waarden van de parameters rang A en de dimensie van de nulruimte van A.

d) [1pt] Laat A een inverteerbare $n \times n$ matrix zijn. De matrix B bestaat uit eerste p rijen van A. Bepaal de dimensie van de nulruimte van B.

Z.O.Z.

e) [2pt] In d), bewijs dat de laatste $(n-p)$ kolommen van A^{-1} een basis zijn voor de nulruimte van B.

5. Gegeven is het dynamische systeem $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ met $A = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.6 \\ -0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$.

a) [3pt] Geef een algemene oplossing $\mathbf{x}_k$ van dit systeem. Bereken eerst de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

b) [1pt] Is de oorsprong een afstoter, aantrekker of zadelpunt?

c) [2pt] Geef de oplossing $\mathbf{x}_k$ als $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Beschrijf het limietgedrag van $\mathbf{x}_k$ als $k \to \infty$.

d) [2pt] Schrijf de matrix P en de diagonale matrix D op zodat $A = PDP^{-1}$. Leg uit waarom dit mogelijk is.

6. Neem $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) [2pt] Bepaal het uitproduct van $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.

b) [2pt] Het orthogonale complement $W^{\perp}$ van een deelruimte W in V is de verzameling $W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ voor alle } \mathbf{w} \text{ in } W\}$. Bepaal het orthogonale complement van $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

c) [3pt] Bereken een volume van een parallellepipedum (blok) bepaald door de vectoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Totaal: 36 + 4= 40 punten

NB: cijfer=[([aantal punten]+4)]/4+bonuspunten], afgerond naar een geheel getal.