Tentamen Lineaire Structuren 1 voor TW (201100100)
dinsdag 8 november 2011; 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

1. [2pt] Een verzameling V bestaat uit vectoren (a_1, a_2) met $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Optelling en scalaire vemenigvuldiging zijn gedefinieerd als volgt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, 0), \quad c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$? Motiveer uw antwoord.

2. [3pt] Gegeven is $S \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bepaal of S een lineair onafhankelijke verzameling is.

3. Laat V een vectorruimte zijn en $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ een georderde basis (ordered basis) voor V.

(a) [2pt] Geef de definitie van de coördinaatvector van een vector $x \in V$ ten opzichte van β.

(b) [3pt] Bewijs dat voor elke $x \in V$ de coördinaatvector (ten opzichte van β) uniek is.

4. Een afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ is gegeven door

$$T(f(x)) = 2f(x) + f'(x) + f''(x), \quad f(x) \in P_2(\mathbb{R}).$$

(a) [2pt] Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

(b) [2pt] Neem $\beta = \{1, x, x^2\}$ als georderde basis (ordered basis) voor $P_2(\mathbb{R})$. Bepaal $[T]_\beta$.

(c) [2pt] Ga na dat $[T(f(x))]_\beta = [T]_\beta [f(x)]_\beta$ voor $f(x) = x^2 + 3x + 4$.

(d) [2pt] Is T een isomorfisme? Motiveer uw antwoord.

Z.O.Z.

5. [3pt] V en W zijn vectorruimtes, $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding. Bewijs dat als T injectief (one-to-one) is, dan $\dim(V) \leq \dim(W)$.

6. Gegeven is een lineair systeem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & & = 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = 4 \\ -x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +9x_4 & -6x_5 & = -6 \end{array}$$

(a) [4pt] Los het systeem op. Geef de algemene oplossing van dit systeem.

(b) [2pt] Bepaal de oplossingsverzameling K_H voor het bijbehorende homogeen systeem $Ax = \underline{0}$. Bepaal de basis en dimensie van K_H.

(c) [2pt] Bepaal de rang van A. Bepaal r lineair onafhankelijke kolommen van A, waarbij $r =$ rang (A).

(d) [2pt] Geef een voorbeeld van een 5×3 matrix B zodat $B \neq O$ en $AB = O$, waarbij O een nul-matrix is. Bepaal de afmetingen van AB.

7. (a) [2pt] A is een inverteerbare $n \times n$ matrix. Laat zien dat $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

(b) [3pt] Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & \alpha \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal $\det(A)$. Voor welke α geldt $\det(A) = 0$?

Totaal: 36 punten

NB: cijfer=[[aantal punten]+4)]/4, afgerond naar een heel getal.