Tentamen Lineaire Structuren, Vakcode 201100101.

Datum	:	31 december 2011
Plaats	:	Kerstboom
Tijd	:	00.15 – 03.15

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

   (b) Is A diagonaliseerbaar?

   (c) Is A normaal?

2. Zij $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de lineaire ruimte bestaande uit alle polynomen van graad twee of lager met complexe coëfficiënten. Op deze ruimte maken we het volgende inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt. \tag{1}$$

   W is de lineaire ruimte opgespannen door de functies 1 en t^2.

   (a) Bepaal een orthonormale basis van W.

   (b) Geef de beste benadering in W van de functie $f(t) = \mathrm{i} + 4t$.

3. Zij V een (complexe) lineaire ruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Bewijs de parallellogramgelijkheid:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2}$$

4. Gebruik het resultaat in de vorige opgave om aan de te tonen dat er op $\mathbb{C}^2$ geen inproduct bestaat waarvan de norm gelijk is aan

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2|.$$

Z.O.Z.

5. Zij U een unitaire afbeelding op de eindig dimensionale ruimte V. Verder is gegeven dat 1 geen eigenwaarde is van U. Toon aan dat $A = (I+U)(I-U)^{-1}$ zelf-geadjungeerd is.

6. Gegeven is de lineaire ruimte V opgespannen door $\{\sin(x), \sin(2x), \cdots, \sin(10x)\}$. Op deze ruimte definiëren we het inproduct

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Verder is de volgende lineaire afbeelding gegeven

$$Tf = f''$$

(a) Toon aan dat $T^* = -T$.

(b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

(c) Geef een orthonormale basis van V.

7. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordan canonieke vorm van deze matrix.

(b) Geef constanten $a_4, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$ zodanig dat

$$a_4A^4 + a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0.$$