Tentamen Lineaire Structuren II, Vakcode 201100101.

Datum	:	28 januari 2013
Plaats	:	SC
Tijd	:	08.45 – 11.45

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.
   (b) Toon aan dat A diagonaliseerbaar is en bepaal deze diagonaal matrix.
   (c) Bepaal de eigenwaarden van A^{-1}.

2. Zij V de (complexe) vectorruimte opgespannen door de functies e^x, xe^x en x^2e^x. Op deze ruimte geven we het volgende (kandidaat) inproduct
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}e^{-2x}dx. \tag{1}$$
   (a) Toon aan dat (1) een inproduct op V definieert.
   (b) Zij W de lineaire deelruimte opgespannen door e^x en x^2e^x. Bepaal t.o.v. het inproduct (1) een orthonormale basis van W.
   (c) Vul deze basis van W aan tot een orthonormale basis van V.

3. Zij V een (eindig dimensionale) inproductruimte en zij T een lineaire afbeelding van V naar V. We nemen aan dat T nilpotent is, d.w.z. er bestaat een natuurlijk getal k zodanig dat $T^k = 0$.
   (a) Bewijs dat nul de enige eigenwaarde van T is.
   (b) Bepaal het karakteristieke polynoom van T.
   (c) Bewijs dat T^* ook nilpotent is.

4. Zij V een (complexe) vectorruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zij T een zelf-geadjungeerde afbeeding op V. Toon aan dat eigenvectoren van T met verschillende (reële) eigenwaarden loodrecht op elkaaar staan.

Z.O.Z.

5. Zij S de lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^n$ naar $\mathbb{C}^n$ gegeven door

$$S(x_1, x_2 \cdots, x_{n-1}, x_n) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, x_1).$$

(a) Toon aan dat S unitair is.

(b) Bepaal S^n en het karakteristieke polynoom.

(c) Is S ook unitair op $\mathbb{C}^n$ met het inproduct

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} k x_k \overline{y_k}?$$

6. Gegeven is de vectorruimte $V = \text{span}(\{e^x, xe^x, x^2e^x\})$ met inproduct, zie opgave 2:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}e^{-2x}dx. \tag{2}$$

Verder is de volgende afbeelding van V naar V gegeven;

$$Tf = f'.$$

(a) Bepaal T^*.

(b) Bepaal de Jordan canonieke vorm van de afbeelding T.

(c) Ten opzichte van welke basis heeft T deze Jordan canonieke vorm?

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2		Som 3		Som 4	Som 5		Som 6	
a	8	a	8	a	6	6	a	6	a	6
b	4	b	6	b	4		b	6	b	4
c	6	c	6	c	4		c	4	c	6

[1] Totaal is 100. U krijgt 10 punten gratis