Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

29 Oktober, 2013

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven een functierij $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geef de definitie van uniforme convergentie van f_n naar een functie f op E.

   (b) Gegeven de functierij

   $$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}, \quad x \geq 1.$$

   Onderzoek of de functie $f_n(x)$ uniform convergeert naar een functie $f(x)$ voor $x \geq 1$ als $n \to \infty$.

   (c) Gegeven de reeks

   $$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j\,2^j} \sin(jx).$$

   Onderzoek of de reeks uniform convergeert op het interval $[0, 2\pi]$.

2. (a) Bepaal de Taylorreeks van $h(x) = x \arctan(x^2)$ rond $x = 0$.

   (b) Wat is het convergentieinterval van de Taylorreeks van $h(x)$ rond $x = 0$? Onderzoek ook de randen.

3. (a) Geef de definitie van een metrische ruimte.

   (b) Geef de definitie van een open en gesloten verzameling.

   (c) Zij $E \subseteq X$, met X een metrische ruimte. Bewijs dat E gesloten is dan en slechts dan indien de limiet van iedere convergente rij $x_k \in E$ voldoet aan:

   $$\lim_{k \to \infty} x_k \in E.$$

4. (a) Geef de definitie van een uniform continue functie.

(b) Zij E een compacte deelverzameling van X, met X een metrische ruimte. Zij $f, g : E \to \mathbb{R}^n$ uniform continue functies. Bewijs dat $f \cdot g$ een uniform continue functie is. Heb je de compactheid van E nodig in het bewijs? Motiveer je antwoord.

5. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(((x-1)^2+(y-1)^2)^{\frac{1}{3}})}{((x-1)^2+(y-1)^2)^{\frac{1}{3}}}, & (x,y) \neq (1,1), \\ 1, & (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

(a) Onderzoek of de functie $f(x,y)$ een continue functie is.

(b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in het punt $(x,y) = (1,1)$.

(c) Is de functie f differentieerbaar in het punt $(x,y) = (1,1)$? Gebruik de definitie van de afgeleide.

6. Gegeven het oppervlak

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - 4x^2 - y^2 \text{ met } 0 < z \leq 4\}.$$

(a) Geef een parametrisatie van het oppervlak S en bereken de normaalvector op S. De normaal vector is naar buiten gericht, dus vanuit de oorsprong naar oneindig. Is het oppervlak glad? Motiveer je antwoord.

(b) Bereken $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ met $\mathbf{F} = (-x, -y, z)$ en $\mathbf{n}$ de eenheidsnormaalvector op S. Gebruik **niet** de stelling van Gauss.

(c) Bereken $\int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} ds$ met $C = \partial S$, de rand van S, $\mathbf{G} = (\sin(x^2) + \frac{1}{3}y^3, \cos\sqrt{z} + 4x - \frac{4}{3}x^3, z \log z - x)$ and $\mathbf{T}$ de eenheidsraakvector. De oriëntatie van C is **met de klok mee** wanneer de kromme bekeken wordt voor grote waarden van $z > 0$.

Puntentelling

1a: 1	2a: 3	3a: 1	4a: 1	5a: 2	6a: 2
1b: 3	2b: 3	3b: 1	4b: 4	5b: 2	6b: 2
1c: 2		3c: 4		5c: 2	6c: 3
6	6	6	5	6	7

totaal 36+4=40 punten