Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

28 oktober, 2014

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven een functierij $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geef de definitie van uniforme convergentie van f_n naar een functie f op E.

   (b) Zij $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Convergeert $f_n(x) \to 0$ uniform op $[0,1]$? Motiveer je antwoord.

   (c) Zij $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Convergeert $f_n(x) \to 0$ uniform op $[1,\infty)$? Motiveer je antwoord.

2. Wat is de convergentiestraal van de reeksen

   (a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - 2k\ln k + 2)^{k/2}} x^k$$

   (b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} x^k$$

3. (a) Geef de impliciete functiestelling.

(b) Gegeven de getallen x_0, y_0, u_0, v_0, s_0, t_0 die allen ongelijk aan nul zijn en voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$u^2 + sx + ty = 0, \tag{1}$$
$$v^2 + tx + sy = 0 \tag{2}$$
$$2s^2x + 2t^2y - 1 = 0 \tag{3}$$
$$s^2x - t^2y = 0 \tag{4}$$

Bewijs dat er functies $u(x,y), v(x,y), s(x,y), t(x,y)$ en een open bol B bestaan die (x_0, y_0) bevat, zodanig dat u, v, s, t continu differentieerbaar zijn en voldoen aan de vergelijkingen (1)-(4) op B en $u(x_0, y_0) = u_0$, $v(x_0, y_0) = v_0$, $s(x_0, y_0) = s_0$, $t(x_0, y_0) = t_0$.

4. (a) Wat is een compacte verzameling. Definieer alle begrippen die je gebruikt in de definitie.
   (b) Bewijs dat een compacte verzameling altijd gesloten is.
   (c) Zij E een niet-lege deelverzameling van een metrische ruimte X met metriek ρ en $f : E \to Y$, met Y een metrische ruimte met metriek τ. Wanneer is een functie f continu op het punt $a \in E$?
   (d) Bewijs de volgende stelling:

   Zij E een compacte deelverzameling van X en $f : X \to Y$, met X, Y metrische ruimtes met, respectievelijk, metriek ρ and τ. Dan is f uniform continu op E d.s.d. indien f continu is op E

5. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Bewijs dat $f(x,y)$ continu is op $(0,0)$. (Hint, gebruik ϵ, δ formulering continuiteit.)
   (b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (c) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x,y) = (0,0)$.
   (d) Zijn de partiële afgeleiden continu op $(x,y) = (0,0)$?
   (e) Is de functie $f(x,y)$ differentieerbaar op $(x,y) = (0,0)$?

6. Zij S de rand van het domein ingesloten door $y = x^2$, $z = 0$, $z = 1$, $y = 4$.

   (a) Bereken de integraal $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ met $\mathbf{n}$ de uitwendige normaalvector en $\mathbf{F} = (x^2 + \sin(z^2), xy^2, \sqrt{z})$.

   (b) Gegeven de tweevorm $\omega = xyz\,dydz + (x + y)dzdx + z\,dxdy$. Bereken $\int\int_S \omega$.

Puntentelling

1a: 1	2a: 1	3a: 2	4a: 1	5a: 2	6a: 4
1b: 2	2b: 2	3b: 3	4b: 4	5b: 1	6b: 4
1c: 1			4c: 1	5c: 1	
			4d: 4	5d: 1	
				5e: 2	
4	3	5	10	7	8

totaal 37+4=41 punten