



### Aanwijzingen

Voor de toets zijn **180 minuten** beschikbaar. Vul op alle ingeleverde vellen uw naam, studentnummer en groep duidelijk in.

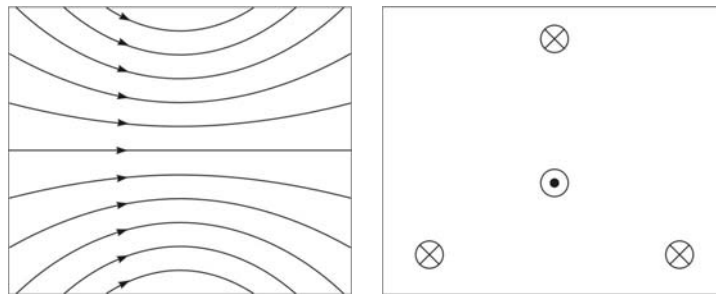
Bij het tentamen mag een formuleblad gebruikt worden dat maximaal 20 formules bevat met een korte aanduiding, waarvan er maximaal 10 elektrische beschrijvingen mogen bevatten en maximaal 10 magnetische. Dit formuleblad moet met het tentamen worden ingeleverd.

Lees voor het beantwoorden de tekst van de opgave eerst helemaal zorgvuldig door.

*Het aantal te behalen punten per opgave staat in de hokjes in de kantlijn.*

10 pt

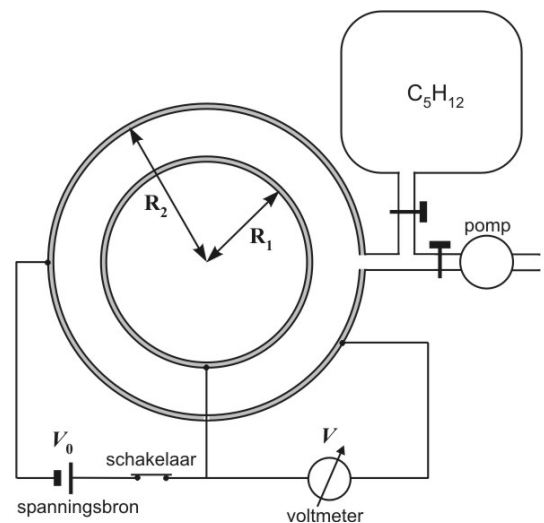
1. In figuur 1 zijn schematisch links een elektrisch veld  $\mathbf{E}$  en rechts 4 rechte stroomdraden die loodrecht doorheen het vlak van de schets prikken getekend.
  - a. Neem de linkerschets over. Teken er een bijhorende familie equipotentiaalijnen  $V = \text{cte}$  bij.
  - b. Neem de rechterschets over. In de centrale draad komt de stroom het blad uit, in de 3 andere draden verdwijnt hij in het blad. Alle 4 de stromen hebben dezelfde grootte. Schets een bijhorende familie magnetische veldlijnen.



**Figuur 1:** links schematische weergave van een  $\mathbf{E}$ -veld en rechts 4 stroomvoerende geleiders die loodrecht door het blad prikken.

20 pt

2. Twee concentrische metalen bolschillen met stralen  $R_1$  en  $R_2$  worden op een potentiaalverschil  $V_0$  gebracht en de ruimte tussen de schillen wordt vacuüm gepompt (figuur 2).
  - a. Bepaal de vrije lading  $Q_f$  op elk van de schillen als functie van  $V_0$ ,  $R_1$  en  $R_2$ . Geef een uitdrukking voor het elektrisch veld  $\mathbf{E}$  in de ruimte binnenin de kleinste schil ( $r < R_1$ ), tussen de schillen ( $R_1 < r < R_2$ ) en buiten de schillen ( $R_2 < r$ )



**Figuur 2 :** sferische condensator ter bepaling van de permitiviteit van gasvormige diëlectrica



- b. De spanningsbron die  $V_0$  instelde wordt losgekoppeld. Vervolgens wordt de ruimte tussen de schillen gevuld met gasvormig pentaan ( $C_5H_{12}$ ) bij atmosferische druk. Hierdoor daalt het potentiaalverschil  $V$  tussen de schillen tot 55% van z'n oorspronkelijke waarde  $V_0$ . Bepaal de relatieve permitiviteit  $\epsilon / \epsilon_0$  van pentaan bij 1 atm.
- c. Wat is na het vullen met pentaan de 'gebonden' lading  $Q_b$  aan het oppervlak van de binnenste bolschil? Wat is nu de vrije lading  $Q_f$  op deze schil?

20 pt

3. Vier identieke positieve puntladingen  $+q_0$  bevinden zich op de hoekpunten van een vierkant met zijde  $2a$ . Neem het vlak van dit vierkant als  $xy$ -vlak en kies de assen zodanig dat de ladingen op posities  $(x,y,z) = (\pm a, \pm a, 0)$  zitten (figuur 3).

- a. Geef een uitdrukking voor de elektrische potentiaal  $V(x, y, z = 0)$  in het  $xy$ -vlak. Kies je nulpunt hierbij zodanig dat  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ .
- b. Toon aan dat deze uitdrukking voor  $x \ll a$  op de  $x$ -as kan worden vereenvoudigd tot

$$V(x \ll a, y = 0, z = 0) \approx \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{2}}{a} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]$$

*Hint:* in plaats van de eerste-orde benadering  $(1+u)^n \approx 1+nu$  die op je formuleblad staat, neem ook de tweede-orde term mee in de reeksontwikkeling:

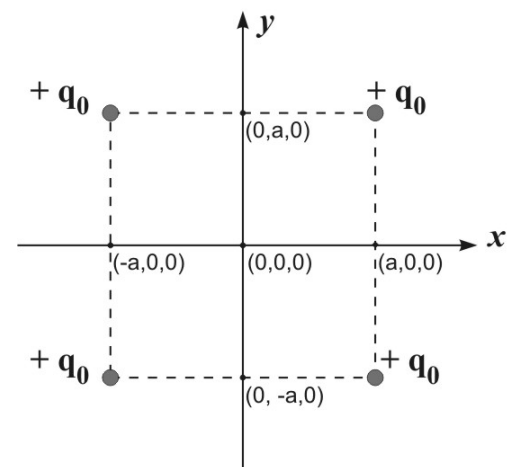
$$(1+u)^n \approx 1+nu + n(n-1)\frac{u^2}{2} .$$

- c. Het kan worden aangetoond dat deze benadering rond de oorsprong niet alleen op de  $x$ -as geldt, maar ook in het hele  $xy$ -vlak, m.a.w. dat

$$V(x, y, z = 0) \approx \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{2}}{a} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{s}{a} \right)^2 \right] \text{ wanneer } s = \sqrt{x^2 + y^2} \ll a .$$

Een vijfde positieve lading  $+q_1$  wordt precies in de oorsprong  $(x,y,z) = (0,0,0)$  gezet. Z'n bewegingsvrijheid is beperkt tot het  $xy$ -vlak. Is deze lading (mechanisch) in evenwicht? Zo ja, is dit evenwicht stabiel of labiel?

- d. Earnshaw's theorema stelt: "Een geladen deeltje kan niet in stabiel evenwicht worden gehouden met alleen maar elektrostatische krachten". Bespreek je antwoord op vraag c) in het licht van dit theorema.

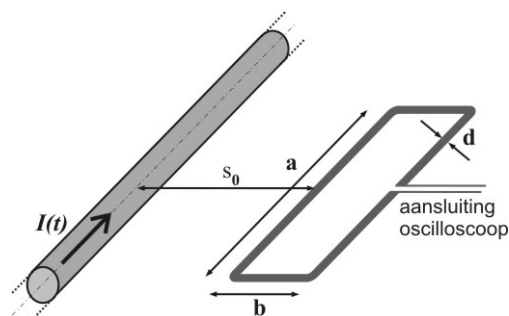


Figuur 3: schikking van 4 identieke puntladingen in het  $xy$ -vlak



30 pt

4. Een lange, rechte geleidende draad met ronde doorsnede draagt een wisselstroom  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Naast de geleider, op een afstand  $s_0$ , hangt een rechthoekige koperen lus (met lengte  $a$  en breedte  $b$ ) die is aangesloten op een oscilloscoop. De draad loopt in het vlak dat wordt bepaald door de rechtehoek en is evenwijdig aan de lange zijde  $a$  van de lus (figuur 4).

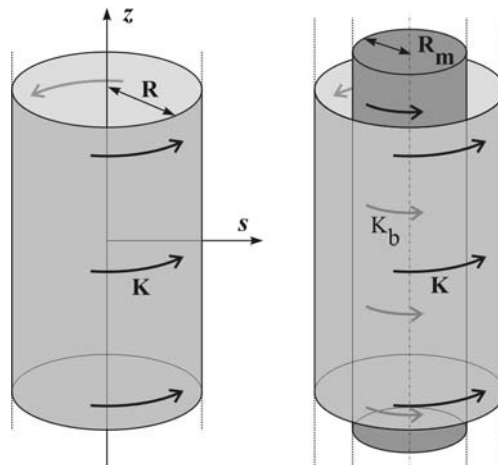


**Figuur 4:** stroomvoerende geleider en inductieve 'pick-up' lus.

- Welke spanning  $V(t)$  wordt er gemeten met de oscilloscoop? Beschouw de stroomvoerende geleider als  $\infty$  lang.
- De draad in de koperen lus heeft een ronde doorsnede met diameter  $d$  en een elektrische geleidbaarheid  $\sigma$ . De oscilloscoop wordt weggehaald en de lus wordt gesloten. Welke stroom gaat er in de lus vloeien? (Veronderstel dat het magneetveld opgewekt door deze stroom verwaarloosbaar blijft vergeleken met het veld opgewekt door de lange rechte geleider.)
- De rechte geleider blijft precies in het vlak van de lus liggen. Welke netto kracht oefent de geleider uit op de (gesloten) lus? Is deze kracht afstotend, aantrekkend of verandert ze van teken in de tijd?

20 pt

5. Een lange, dunwandige stroomvoerende spoel kan in eerste benadering worden voorgesteld als een  $\infty$  lange holle cilinder met straal  $R$  waarover een homogene oppervlaktestroom  $\mathbf{K} = K \hat{\phi}$  loopt (figuur 5, links).  $\hat{\phi}$  is de gebruikelijke tangentiële eenheidsvector in cilindrische coördinaten.



**Figuur 5:** lange, dunwandige spoel zonder (links) en met (rechts) magnetiseerbare kern

- Druk de magnetische inductie  $\mathbf{B}(s, \phi, z)$  binnen en buiten de (lege) spoel uit in functie van  $K$  en  $R$ .
- Stokes theorema toegepast op de vectorpotentiaal luidt  $\iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ . Gebruik symmetrieoverwegingen en Stokes theorema om zowel binnen als buiten de spoel een uitdrukking voor de magnetische vectorpotentiaal  $\mathbf{A}(s, \phi, z)$  te bekomen.
- Een ronde magnetiseerbare staaf met straal  $R_m$  en susceptibiliteit  $\chi$  wordt concentrisch in de spoel geschoven (figuur 5, rechts). De stroomdichtheid  $\mathbf{K}$  in de spoel wordt daarbij gehandhaafd. Welke oppervlaktestroom  $\mathbf{K}_b$  loopt er over het oppervlak van de staaf eens het inschuiven voltooid is?
- Stel dat de staaf een perfecte diamagneet is ( $\chi = -1$ ). Geef een uitdrukking voor de vectorpotentiaal  $\mathbf{A}$  binnenin de staaf ( $s < R_m$ ), buiten de staaf maar binnen de spoel ( $R_m < s < R$ ) en buiten de spoel ( $R < s$ ).



- e. Levert de stroombron die de oppervlaktestroom  $\mathbf{K}$  in de spoel handhaaft tijdens het inbrengen van de perfect diamagnetische staaf extra werk, of wordt er juist werk geleverd op de stroombron? (*Hint*: moet je kracht uitoefenen om een diamagneet in een magneetveld te brengen? Hoe groot is de energie opgeslagen in het magneetveld voor en na het inschuiven?)