UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Inleiding Wiskundige Systeemtheorie (156056) op vrijdag 2 juli 2010, 13:45–16:45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

1. Onderstaand vindt u een aantal beweringen. Sommige zijn goed, sommige zijn fout. Maak duidelijk aan de hand van een plausibele redenering (geen zware bewijzen of complexe tegenvoorbeelden) welke beweringen waar/niet waar zijn. Tenzij anders vermeld zijn alle systemen eindig-dimensionaal.

   a) Gegeven is dat het systeem:

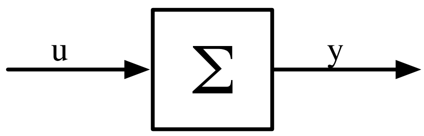
   $$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

   regelbaar is met $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ en $A_3 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$. Hieruit volgt dat het systeem

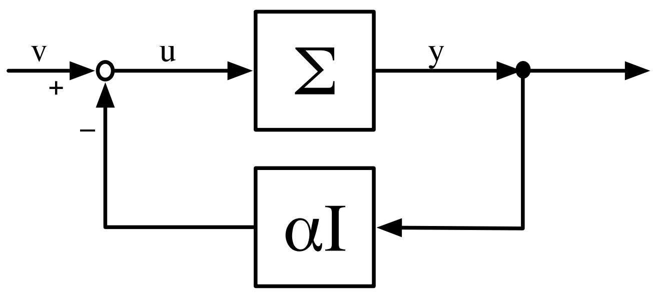
   $$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_2 u_2$$

   regelbaar is.

   b) Gegeven is een lineair tijd-invariant systeem Σ met een regelbare toestandsrepresentatie met ingang u en toestand x.

   We passen een statische uitgangsterugkoppeling toe:

   Het resulterende systeem met ingang v en toestand x is dan altijd regelbaar voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

z.o.z.

Tentamen Inleiding Wiskundige Systeemtheorie (156056) op vrijdag 2 juli 2010, 13:45–16:45 uur.

---

1. c) Gegeven is de matrix A met de volgende Jordan vorm:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

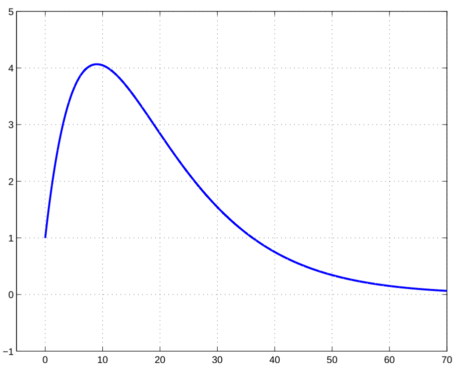
De Jordan vorm van $A^2 + A$ wordt dan gegeven door:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

d) Gegeven is een systeem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

De impulsresponsie $Ce^{At}B$ van dit systeem is gegeven door:



Dan is dit systeem **niet** gelijk aan één van de drie systemen beschreven door:

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$
voor zekere waarden van b_1 en b_2.

(2) $A = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

z.o.z.

Tentamen Inleiding Wiskundige Systeemtheorie (156056) op vrijdag 2 juli 2010, 13:45–16:45 uur.

---

1. e) Een systeem met de volgende structuur is gegeven:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_2)\\ \dot{x}_2 &= h(x_2)\end{aligned}$$

Dit systeem is asymptotisch stabiel met evenwichtspunt (x_{10}, x_{20}) als aan de volgende twee condities voldaan is:

- Het systeem

$$\dot{x}_1 = f(x_1)$$

heeft evenwichtspunt x_{10} en de linearisatie rond x_{10} is asymptotisch stabiel.

- Het systeem

$$\dot{x}_2 = h(x_2)$$

heeft evenwichtspunt x_{20} en de linearisatie rond x_{20} is asymptotisch stabiel.

2. Beschouw het volgende niet-lineaire systeem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left(x_1 - x_1^2\right)\cos x_2 + \sin(u-1)\\ \dot{x}_2 &= \left(x_2^2 - x_2\right)\sin x_1 - (u-1)^2\end{aligned}$$

a) Bepaal alle evenwichtspunten van dit systeem voor $u = 1$.

b) Bepaal een linearisatie van dit systeem rond de oplossing

$$x_1(t) = \pi, \quad x_2(t) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{en} \quad u(t) = 1$$

c) Is het evenwichtspunt $(\pi, \frac{1}{2}\pi)$ van dit niet-lineaire systeem stabiel met $u(t) = 1$?

3. Een systeem wordt gegeven door:

$$y(t) = \int_t^{t^2} \frac{u(\tau)}{u^2(t)+1}\,\mathrm{d}\tau \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Is dit systeem lineair?

b) Is dit systeem tijdinvariant?

c) Is dit systeem causaal?

z.o.z.

---

4. Gegeven is het volgende lineaire systeem:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} x(t).
\end{aligned}
$$

   a) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem stabiel?

   b) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem regelbaar?

   c) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem stabiliseerbaar?

   d) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem waarneembaar?

   e) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem detecteerbaar?

   f) Hangt de dimensie van de regelbare deelruimte af van β?
   Bepaal de Kalman regelbaarheidsdecompositie voor dit systeem voor alle waarden van $\beta \in \mathbb{R}$.

   g) Bepaal een schatter voor de toestand x met behulp van de metingen y zodanig dat de resulterende schatting $\hat{x}$ de eigenschap heeft dat $\hat{x}(t) - x(t) \to 0$ als $t \to \infty$ voor elke beginconditie. De ingang u is bekend en kan in de schatter gebruikt worden. Neem aan dat $\beta = 0$.

   h) Bepaal een stabiliserende dynamische regelaar voor dit systeem op basis van de waarnemingen $y(t)$ en de regelingang $u(t)$. Ga ook expliciet na dat het resulterende gesloten-lus systeem stabiel is. Neem aan dat $\beta = 0$.

   i) Bepaal de overdrachtsfunctie van dit systeem. Neem aan dat $\beta = 0$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave	1	2	3	4
Te scoren punten	25	20	15	30

Het eindcijfer wordt bepaald door bij het aantal punten 10 op te tellen en dan door 10 te delen.