UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Inleiding Wiskundige Systeemtheorie (156056) op vrijdag 1 juli 2011, 13:45–16:45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

---

1. Onderstaand vindt u een aantal beweringen. Sommige zijn goed, sommige zijn fout. Maak duidelijk aan de hand van een plausibele redenering (geen zware bewijzen of complexe tegenvoorbeelden) welke beweringen waar/niet waar zijn. Tenzij anders vermeld zijn alle systemen eindig-dimensionaal.

   a) Een matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die voldoet aan

   $$(A+I)(A+2I)(A+3I) = 0$$

   heeft als Jordan vorm

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

   b) Als (A, C) detecteerbaar is dan is ook $(A - I, C)$ ook detecteerbaar.

   c) Een scalair niet-lineair systeem

   $$\dot{x} = f(x)$$

   met $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar waarvoor $x = 1$ een stabiel evenwichtspunt is kan nooit $x = 0$ als instabiel evenwichtspunt hebben.

   d) Als (A_1, B_1) en (A_2, B_2) beide regelbaar zijn met $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dan is ook

   $$\left(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2, \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{2}B_2\right)$$

   regelbaar.

   e) Een toestandsruimte realisatie van het systeem:

   $$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 3u$$

   wordt gegeven door:

   $$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
   $$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

z.o.z.

Tentamen Inleiding Wiskundige Systeemtheorie (156056) op vrijdag 1 juli 2011, 13:45–16:45 uur.

---

2. Beschouw het volgende niet-lineaire systeem:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 2x - \pi u^2 \sin x$$

   a) Bepaal alle evenwichtspunten van dit systeem voor $u = 1$.

   b) Bepaal een linearisatie van dit systeem rond de oplossing

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{en} \quad u(t) = 1$$

   c) Is het evenwichtspunt geassocieerd met $x(t) = \frac{1}{2}\pi$ en $u(t) = 1$ van dit niet-lineaire systeem asymptotisch stabiel ?

3. Een systeem wordt gegeven door:

$$y(t) = \int_{t/2}^{t} \tau^2 u(\tau)\, d\tau \qquad t \in \mathbb{R}$$

   a) Is dit systeem lineair?

   b) Is dit systeem tijdinvariant?

   c) Is dit systeem causaal?

z.o.z.

Tentamen Inleiding Wiskundige Systeemtheorie (156056) op vrijdag 1 juli 2011, 13:45-16:45 uur.

---

4. Gegeven is het volgende lineaire systeem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} \beta & 2 \\ \beta+1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} x(t). \end{aligned}$$

   a) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem stabiel?
   b) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem regelbaar?
   c) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem stabiliseerbaar?
   d) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem waarneembaar?
   e) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ is dit systeem detecteerbaar?
   f) Hangt de dimensie van de regelbare deelruimte af van β?
   Bepaal de Kalman regelbaarheidsdecompositie voor dit systeem voor alle waarden van $\beta \in \mathbb{R}$.
   g) Bepaal een schatter voor de toestand x met behulp van de metingen y zodanig dat de resulterende schatting $\hat{x}$ de eigenschap heeft dat $\hat{x}(t) - x(t) \to 0$ als $t \to \infty$ voor elke beginconditie. De ingang u is bekend en kan in de schatter gebruikt worden. Neem aan dat $\beta = -2$.
   h) Bepaal een stabiliserende dynamische regelaar voor dit systeem op basis van de waarnemingen $y(t)$ en de regelingang $u(t)$. Neem aan dat $\beta = -2$.
   i) Bepaal de overdrachtsfunctie van dit systeem. Neem aan dat $\beta = -2$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave	1	2	3	4
Te scoren punten	25	20	15	30

Het eindcijfer wordt bepaald door bij het aantal punten 10 op te tellen en dan door 10 te delen.