Vak	:	**Lineaire Analyse**
Vakcode	:	151124
Datum	:	Woensdag, 30 januari 2008
Tijdstip	:	9.00–12.00
Plaats	:	SP-3

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Beschouw op de ruimte $\mathbb{P}_2$ de lineaire afbeelding
$$(Sp)(t) = p_0 + p_2 t + p_1 t^2, \qquad p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2. \tag{1}$$
Dus het beeld (onder S) van $1 - \pi t + 5t^2$ is $1 + 5t - \pi t^2$.
   (a) Bepaal de matrix behorende bij deze lineaire afbeelding t.o.v. de basis $E = \{1, t, t^2\}$.
   (b) Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van S. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathbb{P}_2$.
   (c) Op $\mathbb{P}_2$ definiëren we het inproduct
$$\langle p, q\rangle = p_0\overline{q_0} + p_1\overline{q_1} + p_2\overline{q_2}. \tag{2}$$
   Is S een zelfgeadjungeerde afbeelding t.o.v. dit inproduct?

2. Zij $M_{2,2}$ de reële lineaire ruimte bestaande uit de reële twee bij twee matrices. We beschouwen de volgende deelverzameling van $M_{2,2}$
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2} \mid a_{21} = -a_{12} \right\}. \tag{3}$$
   (a) Toon aan dat V een lineaire deelruimte is van $M_{2,2}$.
   (b) Bepaal een basis van V, en geef z'n dimensie.

   We nemen op $M_{2,2}$ het volgende (kandidaat)inproduct:
$$\langle A, B\rangle = 4a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}, \qquad A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{2,2}. \tag{4}$$
   (c) Toon aan dat (4) geen inproduct op $M_{2,2}$ definieert.
   (d) Toon aan dat (4) wel een inproduct op V definieert.
   (e) Maak een orthonormale basis van V.

3. Zij V een (complexe) lineaire ruimte met het inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zij u, v, w en z elementen van V. Toon met behulp van de definitie van het inproduct de volgende eigenschappen aan.
   (a) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (b) $\langle u + v + w, z\rangle = \langle u, z\rangle + \langle v, z\rangle + \langle w, z\rangle$.

4. Zij V een (eindig-dimensionale) inproductruimte, en zij U een unitaire afbeelding van V naar V. Toon aan dat alle eigenwaarden van U absolute waarde één hebben.

Z.O.Z.

5. Beschouw de lineaire ruimte $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ van alle reële rijtjes $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ waarvoor geldt $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty$. Op deze ruimte definiëren we de (kandidaat)norm

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2}, \tag{5}$$

waarbij $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Dus de "norm" van $(0, 0, 1, 0, \ldots)$ is drie.

(a) Toon aan dat de uitdrukking van (5) een norm op $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ definieert.
Hint: Gebruik dat $\ell^2(\mathbb{R})$ de norm $\|a\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$ heeft, $a = (a_1, a_2, \ldots)$.

Op $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ geven we het volgende inproduct

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n y_n, \tag{6}$$

waarbij $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$.

(b) Toon aan dat (5) de norm is die bij het inproduct (6) hoort.

(c) Gegeven is dat $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ met het inproduct (6) een Hilbertruimte is.
Construeer een maximaal orthonormaal stelsel van $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$.

6. We beschouwen wederom $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ met norm (5), en we definiëren de afbeelding L van $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ naar $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ als volgt:

$$Lx = z \qquad \text{met } z_n = x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Dus het beeld (onder L) van bijvoorbeeld het rijtje $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 0, 0, \ldots)$ is $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 0, 0, \ldots)$.

(a) Toon aan dat L een lineaire afbeelding is.

(b) Toon aan dat L een begrensde afbeelding is.

(c) Bepaal de norm van L.

Normering:

1 a : 5	2 a : 6	3 a : 4	4 : 8	5 a : 6	6 a : 6
b : 5	b : 4	b : 4		b : 4	b : 6
c : 5	c : 3			c : 6	c : 6
	d : 6				
	e : 6				

Totaal: 90 + 10 = 100 punten