Tentamen
Lineaire Analyse (151124)

Datum: 12-04-2012
Plaats: CR-3A
Tijd: 13:45-16:45

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Beschouw de ruimte van 2×2 matrices

$$\mathbb{W} := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A + A^T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\}.$$

   (a) Toon aan dat $\mathbb{W}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^{2\times 2}$

   (b) Bepaal een basis $\mathbb{W}$. (U moet ook aantonen dat het basis is.)

2. Beschouw de ruimte $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Op deze ruimte definiëren we de afbeelding $\mathcal{A} : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ als

$$(\mathcal{A}f)(t) = f'(t) + \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

   (a) Laat zien dat dit een lineaire afbeelding is van $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ naar $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (U moet dus ook antonen dat $\mathcal{A}(f)$ in $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zit als $f \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.)

   (b) Bepaal de matrix A_{SS} van de afbeelding, waarbij $S = \{1, t, t^2\}$.

   (c) Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Beschouw een afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Formuleer de *dimensiestelling* die een verband aangeeft tussen $\ker(\mathcal{A})$ en $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$.

4. Is

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n + (x_n - x_{-n})(y_n - y_{-n})$$

een inproduct op $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$?

5. Beschouw $\mathscr{P}_1([0,1],\mathbb{R})$ met daarop de gewone differentiator $\mathcal{D}$ gedefinieerd als

$$D(p) = p'.$$

Bepaal de geadjungeerde operator $\mathcal{D}^* : \mathscr{P}_1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_1([0,1],\mathbb{R})$ met betrekking tot het inproduct $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t$. [Hint: bepaal een orthonormale basis van $\mathscr{P}_1([0,1],\mathbb{R})$.]

6. Stel $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ en $\mathcal{B} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Toon aan dat elke operatornorm voldoet aan

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|.$$

7. Beschouw $\mathbb{W} := \operatorname{span}\{\cos, \sin\}$ als deelverzameling van de complexe ruimte $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Bepaal een basis S van $\mathbb{W}$ zodanig dat $f(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ als coördinatenvector heeft

$$f_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(De i is hier de imaginaire eenheid. U hoeft niet aan te tonen dat u basis een basis is.)

opgave:	1	2	3	4	5	6	7
punten:	3+3	3+2+2	3	4	5	4	2

Het tentamencijfer is $1 + 9p/p_{\max}$ met p het behaalde aantal punten.