**Tentamen Markovketens (153065)**
**Vrijdag 20 juni 2008, 9.00 - 12.00 uur**

| |
|---|
| Dit tentamen bevat 5 opgaven. Gebruik van het boek is *NIET* toegestaan.<br>Vermeld vakcode en studentnummer op werk en tentamenbriefje.<br>Motiveer uw antwoorden. Normering: tentamencijfer = 1 + aantal punten/4. |

1. Op een rustig stuk weg wordt de snelheid van passerende auto's gecontroleerd middels een automatische camera. Ga ervan uit dat er gemiddeld 60 auto's per uur langskomen volgens een Poisson proces.

(1) a. Wat is de kans er dat tussen 8.56 en 9.00 uur precies 2 auto's langskomen?

(1) b. Gegeven dat tussen 8.56 en 9.00 uur precies 2 auto's langskomen, wat is dan het verwachte aankomsttijdstip van de eerste auto na 9.00 uur?

(1) c. Gegeven dat tussen 9.00 en 9.04 uur precies 1 auto langskomt, wat is dan het verwachte aankomsttijdstip van deze auto?

(2) d. Gegeven dat tussen 9.00 en 9.04 uur precies 2 auto's langskomen, wat is dan de kans dat beide tussen 9.03 en 9.04 aankwamen?

(2) e. Als de kans dat een auto te hard rijdt $p$ is, wat is dan de kans dat er gedurende een uur geen auto's voorbij komen die te hard rijden?

2. Een man bezit in totaal 4 paraplu's die zich op twee plaatsen bevinden namelijk bij hem thuis en op z'n werk. Als het regent aan het begin (eind) van een dag en er is een paraplu beschikbaar dan neemt hij een paraplu mee naar zijn werk (naar huis). Als het niet regent neemt hij geen paraplu mee en als het wel regent maar er is geen paraplu beschikbaar dan wordt onze man nat. Neem aan dat, onafhankelijk van het verleden, de kans dat het regent aan het begin (eind) van een dag gelijk is aan $p$. Zij $X_n$ het aantal paraplu's op de plek waar de man verblijft juist voor de $n^e$ wandeling (van huis naar werk of andersom).

(2) a. Laat zien dat $(X_n, n = 1, 2, \ldots)$ een Markovketen is en bepaal de overgangsmatrix.

(2) b. Bepaal $P(X_{n+2} = i | X_n = i)$ voor $i = 0, 1, \ldots, 4$.

(2) c. Laat zien dat de keten irreducibel, recurrent en aperiodiek is.

(2) d. Bepaal de limietverdeling van de keten.

(2) e. Bepaal de lange termijn kans dat onze man op een willekeurige wandeling nat wordt.

3. Gegeven is een vertakkingsproces (branching process) waarin ieder individu na één generatie sterft, en een aantal nakomelingen in de volgende generatie heeft dat verdeeld is volgens de stochastische variabele $Z$, onafhankelijk van de andere individuen. De verdeling van $Z$ is gegeven door $p_0 = 1/10, p_1 = 2/5, p_2 = 1/2$. Zij $X_n$ de grootte van de populatie in generatie $n \geq 0$, met $X_0 = 1$.

(1) a. Bepaal $E[X_5]$.

(2) b. Wat is de kans dat de populatie uiteindelijk uitsterft?

4. Beschouw een geboorte-sterfte proces met toestandsruimte $\{0, 1, 2, \ldots\}$ en geboorte-/sterfte-intensiteiten $\lambda_i$ en $\mu_i, i = 0, 1, \ldots$ (waarbij $\mu_0 = 0$). Zij $T_i$ het eerste tijdstip waarop het proces toestand $i + 1$ bereikt vanuit toestand $i$.

(2) a. Toon aan dat $E[T_0] = 1/\lambda_0$ en $E[T_i] = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E[T_{i-1}], \qquad i \geq 1$

Twee machines hebben beiden een exponentieel verdeelde levensduur met verwachtingswaarde 50 uur. Bij een defect wordt er door een monteur van een servicebedrijf een reparatie uitgevoerd; de reparatietijd is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde 5 uur. Als beide machines defect zijn ligt de productie stil en wordt er aan iedere machine door een aparte monteurs gewerkt.

(2) b. Als op gegeven moment geen van de machines defect is, hoe lang duurt het dan naar verwachting totdat de productie voor het eerst stil valt?

(2) c. Welke fractie van de tijd ligt de productie stil?

(2) d. Hoe vaak wordt er gemiddeld per week een monteur besteld?

5. In een kleine supermarkt komen klanten met hun boodschappen aan bij de kassa met onafhankelijke tussentijden die exponentieel verdeeld zijn met gemiddelde 3 minuten. De tijd die het afrekenen duurt is eveneens exponentieel verdeeld, met gemiddelde 2 minuten. Normaal gesproken is slechts één kassa in bedrijf, maar wanneer de rij uit vier of meer klanten bestaat (inclusief de klant in bediening), wordt ook de tweede kassa ingeschakeld, zodat de bedieningsintensiteit verdubbelt. Zodra het aantal klanten minder dan vier wordt, wordt de extra kassa weer gesloten. Zij $X(t)$ het totaal aantal klanten in het systeem op tijdstip $t$, inclusief de klant(en) in bediening.

(2) a. Geef een stelsel vergelijkingen waaruit de limietkansen $P_j = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = j)$ kunnen worden opgelost.

(2) b. De (tussen)oplossing van het hierboven bedoelde stelsel in termen van $P_0$ is $P_1 = \frac{2}{3}P_0, P_2 = \frac{4}{9}P_0$ en $P_j = (\frac{1}{3})^{j-3}\frac{8}{27}P_0, j \geq 3$. Bepaal de lange termijn fractie van klanten die moeten wachten voor bediening.

(2) c. Bepaal, uitgaande van stationariteit (steady-state): (i) het verwachte aantal klanten in het systeem en (ii) de verwachte verblijftijd van een klant in het systeem.

Omdat de klanten zich bij het openen van de extra kassa over de beide kassa's verdelen, is het in praktijk nogal ongepast om een kassa alweer te sluiten op het moment dat er nog drie klanten aanwezig zijn (er moet dan een klant die denkt aan de beurt te zijn naar de andere kassa worden verwezen). Ga er daarom in het vervolg vanuit dat de kassa pas wordt gesloten als er nog maar één klant aanwezig is.

(1) d. Leg uit waarom het proces $(X(t), t \geq 0)$ nu géén Markovketen is.

(1) e. Door de toestandsbeschrijving uit te breiden kan wel een Markovketen worden verkregen. Geef deze beschrijving en de bijbehorende overgangsintensiteiten.