Tentamen Markovketens (153065)
Maandag 25 januari 2010, 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bevat 3 opgaven
Gebruik van het boek is niet toegestaan
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje
Motiveer uw antwoorden

1. We nemen aan dat print jobs bij een netwerk printer aankomen met onafhankelijke en exponentieel verdeelde tussenaankomsttijden met parameter 10 per uur. Het printen gebeurt met een constante snelheid van precies 10 pagina's per minuut. De groottes van de jobs zijn o.o. en verdeeld volgens een Poisson verdeling met een gemiddelde van 2 pagina's.

   a. Wat is de kans dat er precies 20 jobs aankomen tussen 8.30 uur en 10.30 uur?

   b. Wat is de kans dat een print job aankomt terwijl de vorige job nog niet gereed is, wanneer deze vorige job uit 6 pagina's bestaat? (Neem aan dat het afdrukken van deze vorige job onmiddelijk begon na aankomst).

   c. Wat is de verwachte aankomsttijd van de eerste job na 12.00 uur, als de vorige job om 11.58 uur aankwam?

   d. Zij $M(t)$ het aantal print jobs, bestaande uit meer dan 3 pagina's, dat aankomt in het tijdsinterval $(0, t]$. Geef een uitdrukking voor $P\{M(t) = 0\}$.

   e. Wat is op de lange duur het verwachte aantal afgedrukte pagina's per uur?

2. In een eenvoudig model wordt de toestand van een autodynamo aan het begin van jaar n gegeven door een stochastische variabele X_n, $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, welke waarden aanneemt tussen 0 and 6. Als $X_n = 0$ is de dynamo 'als nieuw', wanneer $X_n = 6$, is zijn toestand 'zeer slecht'. Afhankelijk van de toestand i van de dynamo aan het begin van een jaar, gaat deze kapot gedurende dit jaar met kans $i/6$. Hierna wordt de dynamo volledig gereviseerd, zodat hij aan het begin van het volgende jaar weer als nieuw is. Als de dynamo niet kapot gaat gedurende een jaar, neemt de toestand aan het eind van het jaar met één toe.

   a. Laat zien dat (X_n) een discrete tijd Markov keten is en ga na: is de keten (i) irreducibel, (ii) aperiodiek, (iii) transient?

   b. Welke fractie van de tijd (op de lange duur) is de dynamo 'als nieuw'?

   c. Gegeven dat de dynamo als nieuw is, wat is the kans dat hij over 4 jaar weer als nieuw is?

   d. Gegeven dat de dynamo in toestand 2 is, bepaal de kans dat hij een 'zeer slechte' toestand bereikt *voordat* hij 'als nieuw' is.

   e. Bepaal de gemiddelde tijd tussen twee revisies.

Z.O.Z.

3. GSM basisstations (antenne's) kunnen slechts een beperkt aantal mobiele telefoongesprekken tegelijkertijd doorgeven. We beschouwen een klein basisstation en nemen aan dat dit 4 gesprekken kan doorgeven (in werkelijkheid is deze capaciteit veel groter). Aanvragen voor telefoongesprekken komen aan volgens een Poisson process met intensiteit 30 per uur, terwijl de lengte van de gesprekken exponentieel verdeeld is met als gemiddelde 1 minuut. Zij $X(t)$ het aantal doorgegeven gesprekken op tijdstip t. Dan is $(X(t), t \geq 0)$ een continue tijd Markov keten met toestandsruimte $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

   a. Als $X(t) = 2$, hoe lang duurt het dan gemiddeld voordat de toestand verandert?

   b. Wat is de lange termijn kans dat het station volledig bezet is?

   We nemen vanaf nu aan dat het station enige tijd overbelast raakt als er een gesprek aankomt terwijl het station volledig bezet is. Wanneer dit gebeurt, wordt het systeem gereset na een stochastische tijd van T uur, waarbij T uniform verdeeld is op $[0, 3]$. Hierna werkt het systeem weer, maar het is dan wel leeg (er worden op dat moment dus geen gesprekken doorgegeven). Zij $N(t)$ het aantal keren dat het systeem overbelast raakt gedurende het interval $(0, t]$.

   c. Laat zien dat de verwachte tijd tot het eerstvolgende moment van overbelasting vanuit een leeg systeem 24.3 uur bedraagt. Hint: voeg een absorberende toestand 5 toe aan de toestandsruimte van $(X(t))$.

   d. Is het proces $(N(t), t \geq 0)$ een vernieuwingsproces? Waarom (niet)?

   e. Hoe frequent raakt het systeem naar verwachting overbelast, op de lange duur?

   f. Wat is de fractie van de tijd op lange termijn dat het systeem overbelast is?

<u>Normering:</u>

<table>
<tr><td colspan="5">1</td><td colspan="5">2</td><td colspan="6">3</td><td>totaal</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>+ 4 = 40</td></tr>
</table>

Examination Markovketens (153065)
Monday January 25 2010, 8.45 - 11.45 hours
(English version)

This exam consists of 3 problems
Use of book is not permitted
Motivate your answers

1. Suppose that print jobs arrive at a network printer with independent and exponentially distributed inter-arrival times with parameter 10 per hour. The printer prints exactly 10 pages per minute when active. The sizes of the jobs are i.i.d. and have a Poisson distribution with a mean of 2 pages.

   a. What is the probability that precisely 20 jobs arrive between 8.30 hours and 10.30 hours?

   b. What is the probability that a print job arrives while the previous job is not finished, when this previous job consists of 6 pages? (Assume that the printing of this previous job started immediately after its arrival).

   c. What is the expected arrival time of the first job after 12.00 hours, when the previous job arrived at 11.58 hours?

   d. Let $M(t)$ be the number of print jobs consisting of more than 3 pages that arrive in a time interval $(0, t]$. Give an expression for $P\{M(t) = 0\}$.

   e. In the long run, what is the expected number of printed pages per hour?

2. In a simple model, the state of a car dynamo at the beginning of year n is given by a random variable X_n, $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, which takes values between 0 and 6. When $X_n = 0$, the dynamo is 'as new', when $X_n = 6$, it is in 'very bad' condition. Depending on the state i of the dynamo at the beginning of a year, it breaks down during this year with probability $i/6$. After a breakdown, the dynamo is completely revised, so that it is as new at the start of the next year. If a dynamo does not break down during a year, the state is increased by one at the end of the year.

   a. Show that (X_n) is a discrete time Markov chain and determine whether the chain is: (i) irreducible, (ii) aperiodic, (iii) transient.

   b. What fraction of years (in the long run) is the dynamo 'as new'?

   c. Given that the dynamo is as new, what is the probability that it is again as new after 4 years?

   d. Given that the dynamo is in state 2, find the probability that it reaches a 'very bad' condition *before* it will be 'as new'.

   e. Determine the mean time between two revisions.

Z.O.Z.

3. GSM base stations (antenna's) can only support a limited number of mobile telephone conversations at the same time. Let us consider a small base station and assume that it can only support 4 conversations (in real stations this capacity is much higher). Requests for telephone calls arrive according to a Poisson process with rate 30 per hour, while the length of the calls is exponentially distributed with mean 1 minute. Let $X(t)$ be the number of supported calls at time t. Then $(X(t), t \geq 0)$ is a continous-time Markov chain with state space $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

   a. When $X(t) = 2$, how long does it take on average before the system state changes?

   b. What is the long run probability that the station is completely occupied?

   From now on we assume that the system breaks down when a call arrives while the station is completely occupied. When this happens, the system is reset after a stochastic time of T hours, where T is uniformly distributed on $[0, 3]$. After this, the system works properly again, but it is empty (no phone calls are supported). Let $N(t)$ denote the number of breakdowns in the interval $(0, t]$.

   c. Show that the expected time to a breakdown is 24.3 hours when the system starts empty. Hint: add an absorbing state 5 to the state space of $(X(t))$.

   d. Is the process $(N(t), t \geq 0)$ a renewal process? Why (not)?

   e. On average, how frequently does the system break down in the long run?

   f. What is the long run fraction of time that the system is not working properly (between breakdown and reset)?

Standard:

1					2					3						totaal
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	f	
2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	3	3	2	2	2	+ 4 = 40