

Tentamen Markovketens (191530651)
Maandag 24 januari 2011, 8.45 - 11.45 uur.

Dit tentamen bevat 5 opgaven. Gebruik van het boek is niet toegestaan.
Gebruik van een *eenvoudige* rekenmachine is toegestaan,
maar een *grafische* rekenmachine (GR) is *niet* toegestaan.
Vermeld naam en studentnummer op al het ingeleverde werk.
Motiveer alle antwoorden.

1. (Theorievragen)
 - a. Leid voor een vertakkingsproces (branching process) $\{X_n\}$ een recurrente formule af voor $P(X_n = 0), n = 0, 1, \dots$. Neem aan dat ieder individu k nakomelingen heeft met kans $a_k, k = 0, 1, 2, \dots$, onafhankelijk van al het overige.
 - b. Geef één van de definities van een Poisson proces.
 - c. Geef de definitie voor een Markov keten $\{X(t)\}$ in continue tijd.
 - d. Leid de vernieuwingsvergelijking (renewal equation) af die geldt voor de vernieuwingsfunctie $m(t)$.

2. Op een warme zomerdag nuttigt u het middagmaal buiten. Helaas wordt u gestoord door insecten, die op uw eten afkomen volgens een Poisson proces met intensiteit 12 per uur. Met kans $1/3$ is elk van deze insecten een wesp. Verder is bekend dat het laatste insect vóór 12.00 uur zich om 11.57 uur aandiente.
 - a. Hoe laat verwacht u het volgende insect na 12.00 uur?
 - b. Wat is de kans dat u tussen 12.00 uur en 12.15 uur door precies 1 wesp en 3 andere insecten wordt gestoord?
 - c. Gegeven dat u tussen 12.00 uur en 13.00 uur door 6 insecten wordt geplaagd, wat is de kans dat u tussen 12.00 uur en 12.15 uur ongestoord kunt eten?

3. Twee gokkers, A en B , spelen elke dag een bepaald spel. Hierbij zetten ze allebei een euro in, waarna de gezamenlijke inzet (twee euro) door speler A wordt gewonnen met kans $1/3$ en door speler B met kans $2/3$. Wanneer het kapitaal van een van beide spelers tot 0 is gereduceerd, wordt het spel in de volgende dagen niet meer gespeeld. Vóór het eerste spel wordt gespeeld, hebben beide spelers een beginkapitaal van 2 euro. Zij X_n het kapitaal van speler A na n dagen. Dan is $(X_n, n = 0, 1, \dots)$ een Markov-keten.
 - a. Bepaal de overgangsmatrix van deze keten, en bepaal de communicerende klassen.
 - b. Geef van alle toestanden de periode, en ga na of ze transient of recurrent zijn.
 - c. Bepaal de kans dat speler A als eerste geen geld meer heeft.

Neem nu aan dat wanneer een der spelers een kapitaal van 0 euro bereikt, deze onmiddellijk hierna een euro kado krijgt van zijn tegenspeler. De volgende dag vervolgen ze hun spel als tevoren. Zij Y_n het kapitaal van speler A na n dagen in deze nieuwe situatie. Ook $(Y_n, n = 0, 1, \dots)$ is een Markov-keten, met toestandsruimte $\{1, 2, 3\}$.

- d. Welke fractie van de tijd (op de lange termijn) bezit speler A tenminste 2 euro?
4. Een machine wordt telkens vervangen wanneer deze kapot gaat. De levensduren (in jaren) van nieuwe machines zijn onderling onafhankelijk en hebben een uniforme verdeling op $[0, 4]$.
- Hoe vaak wordt er op de lange duur een machine vervangen? Formuleer de stelling die u gebruikt.
 - Als de kosten per vervanging uniform verdeeld zijn op $[1000, 2000]$, wat zijn dan de verwachte kosten per jaar op lange termijn? Formuleer de stelling die u gebruikt.
 - Geef de verwachtingswaarde van de leeftijd $A(t)$ van de huidige machine (dus de verstreken tijd sinds de vorige vernieuwing) op tijdstip t voor $t \rightarrow \infty$.
5. In een kleine autowerkplaats wordt zonder afspraken gewerkt. Klanten komen aan volgens een Poissonproces met intensiteit 2 per uur. De reparatietijden zijn exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van een half uur. In de zaak werken 2 monteurs, maar aan elke auto werkt slechts één monteur tegelijk. Er is plaats voor maximaal 3 auto's, inclusief de auto's die in bediening zijn. Klanten die aankomen bij een volle werkplaats gaan meteen weer weg om hun auto elders te laten repareren.
- Definieer een geschikte Markovketen die dit systeem beschrijft en bepaal de transitieintensiteiten q_{ij} , ($i \neq j$) van deze keten.
 - Bepaal de kans dat de werkplaats leeg is op de lange duur.
 - Hoe lang duurt gemiddeld een periode waarin gewerkt wordt door minstens één van de monteurs?

Normering:

1				2			3				4			5			Totaal
a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	
2	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	3	2	3	2	+4=40

Tentamencijfer = # punten / 4