Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T2-110119
Datum : 16 januari 2011

Toets Numerieke Wiskunde en Modelleren (19154027)

deeltoets 2 , 19 januari 2011 , 08.45 – 10.15 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje.
Motiveer al uw antwoorden.

1. We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin(x) - 2\cos(x^2) + 1 \tag{1}$$

   a) Maak een schets van de functie op het interval $[0, 1]$.
   b) Bewijs dat de functie f tenminste één nulpunt heeft op het interval $[0, 1]$.
   c) i) Welke numerieke methode kies je om gegarandeerd één nulpunt op het interval $[0, 1]$ te vinden?
      ii) Hoeveel stappen zijn ongeveer nodig om met deze methode een nulpunt met een nauwkeurigheid van 10^{-4} te bepalen?
   d) i) Formuleer de methode van Newton waarmee je een nulpunt van (1) numeriek kunt bepalen.
      ii) Geef één reden waarom je voor de Newton methode zou kiezen.
      iii) Geen één reden waarom je niet voor de Newton methode zou kiezen.

2. Er bestaan veel manieren om een gewone differentiaalvergelijking numeriek op te lossen. Het probleem is:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0,$$

en we willen $y(1)$ weten. Hierin is f een gegeven functie, en y_0 een gegeven getal.

   (a) Wat is de analytische oplossing van het probleem indien

$$f(t, y) = -3y, \quad y_0 = 1? \tag{2}$$

Eén zo'n methode is de zgn. midpuntregel. Als we y_n schrijven voor de numerieke benadering op $t_n = nh$, met h de stapgrootte, ziet deze methode er als volgt uit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1/2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})).$$

   (b) Is deze methode een expliciete of impliciete methode?
   (c) Laat zien dat de *lokale* afbreekfout van de methode van orde 3 is, in het geval dat we ons probleem oplossen voor geval (2).
   (d) Dat de methode een lokale afbreekfout orde 3 heeft, kunnen we bewijzen voor elke functie f (die aan bepaalde voorwaarden voldoet). Wat kunnen we daaruit concluderen voor de *globale* afbreekfout?

(e) Hoe zou je de methode van Newton kunnen gebruiken om y_{n+1} voor een algemene functie f iteratief te benaderen? Welke startwaarde zou je voor het iteratieproces kiezen? Hoe ziet één volledige stap in het iteratieproces er in detail uit?

(f) Hoe zou een numeriek experiment eruit zien waarmee je jouw implementatie voor een algemene f zou testen? Wat verwacht je in detail van de convergentiesnelheid van de resultaten, mits de code naar behoren werkt?

NB: De waarde van de deelopgaven zijn: 3/4 en 3/4. In totaal 1 1/2 punt. Deze deeltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste 3/4 punt is behaald.