Afdeling der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk : NWM/toets/BJG/T2-20130125
Datum : 17 januari 2013

Toets Numerieke Wiskunde en Modelleren (191540270)

Deeltoets 2 , 25 januari 2013 , 08:45 – 10:15 uur.

Vermeld a.u.b. uw studentnummer op het tentamenbriefje.
Motiveer al uw antwoorden.

1. We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \cos(x) + e^{-x} \tag{1}$$

   a) Bewijs dat de functie f tenminste één nulpunt heeft op het interval $[0, \pi]$.

   Omdat we voor de functie f in (1) geen exacte nulpunten kunnen bepalen, berekenen we één zo'n nulpunt met een numerieke methode, en wel met behulp van een iteratieprocedure.

   b) i) Welke numerieke methode kiest u om gegarandeerd één nulpunt op het interval $[0, \pi]$ te vinden?
      ii) Hoeveel stappen zijn ongeveer nodig om met deze methode een nulpunt met een nauwkeurigheid van 10^{-4} te bepalen?

   c) Een efficiënte methode om nulpunten te vinden is de methode van Newton.
      i) Uitgaande van $x = 0$ als startwaarde, wat levert de methode van Newton op na één stap voor de functie f in (1)?
      ii) Hoeveel stappen zijn ongeveer nodig om met deze methode een nulpunt met een nauwkeurigheid van 10^{-4} te bepalen?

2. We bekijken het volgende probleem: bepaal $y(1)$ als de functie y voldoet aan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{met} \quad f(x, y) = -2y \quad ; \quad y(0) = 3 \tag{2}$$

   Een methode om (2) numeriek mee op te lossen is de volgende tweetraps Runge-Kutta methode. Als we y_n schrijven voor de numerieke benadering op $x_n = nh$, met h de stapgrootte, dan ziet deze methode er als volgt uit:

$$\tilde{y}_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, \tilde{y}_{n+1/2}).$$

   (a) Is deze methode een expliciete of een impliciete methode?
   (b) Bereken y_1 en y_2 in detail.
   (c) Als gegeven is dat de *lokale* afbreekfout van de methode van orde 3 is wat kunt u dan concluderen voor de *globale* afbreekfout?
   (d) Hoe zou uw numerieke experiment eruit zien waarmee u de lokale en de globale afbreekfout van deze Runge-Kutta methode zou bepalen. Welke stappen zou u nemen en hoe zou u de theoretische voorspellingen voor deze fouten verifiëren?

NB: De waarde van de deelopgaven zijn: 3/4 en 3/4. In totaal 1 1/2 punt. Deze deeltoets is met goed gevolg afgerond als tenminste 3/4 punt is behaald.