Vak	:	**Signalen en Transformaties**
Vakcode	:	156081
Datum	:	Maandag, 6 november 2006
Tijdstip	:	09.00–12.00
Plaats	:	SC-0

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.[1]
Een A-4 met handgeschreven aantekingen alsmede een VWO formuleblad mag wel gebruikt worden.

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking
$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = 6u^{(2)}(t). \tag{1}$$
   (a) Bepaal de homogene oplossing van deze differentiaalvergelijking.
   (b) Gegeven is dat $u(t) = \mathrm{e}^t, t \in \mathbb{R}$. Bepaal de algemene oplossing van (1).
   (c) Bepaal de frequentieresponsie van het systeem (1).
   (d) Bepaal de impulsresponsie $h(t)$ van (1) voor $t \in \mathbb{R}$.

2. Gegeven is de functie $f(t)$ met periode 4, die op het interval $[-2, 2)$ gegeven wordt door
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-2, -1] \\ 1, & t \in (-1, 1), \\ 0, & t \in [1, 2). \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Teken de functie $f(t)$.
   (b) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten, f_k, van $f(t)$ gegeven worden door
$$f_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0, \\ \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{k\pi} & k \neq 0. \end{cases}$$
   (c) Bepaal de reële Fourierreeks.
   (d) Bepaal de uitkomst van de volgende reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = 7\mathrm{e}^{3t}\,\mathbb{1}(-t)$ en $g(t) = \mathrm{e}^{-4t}\,\mathbb{1}(t)$ op twee verschillende manieren.

Z.O.Z.

[1] Een rekenliniaal is wel toegestaan, maar nutteloos

4. Gegeven is de differentaalvergelijking

$$y^{(1)}(t) + y(t) = u(t). \tag{3}$$

Verder is gegeven dat de ingang $u(t)$ gelijk is aan de functie $f(t)$ van opgave 2.

De student Kwe.T. Fehl beweert dat het nu heel eenvoudig is om de periodieke oplossing van deze differentiaalvergelijking te zien. De functie $f(t)$ is gelijk aan één of gelijk aan nul, dus de afgeleide van $f(t)$ is altijd nul. Neem je nu $y(t) = f(t)$ in (3), dan staat er

$$y^{(1)}(t) + y(t) = 0 + f(t) = f(t).$$

Dit is gelijk aan de ingang, en dus is $f(t)$ de periodieke oplossing van (3).

Volgens z'n huisgenoot Iku Nullus is dit niet waar. Na lang rekenen kwam hij op een ander antwoord.

Aan u de vraag om uit te zoeken welke van de twee beweringen waar/onwaar zijn.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) + 4y(t) = 2u^{(1)}(t) + 2u(t). \tag{4}$$

(a) Bepaal met behulp van de definitie de Laplace getransformeerde van $\delta(t - \pi)$.

(b) Zij a een positieve constante. Toon aan dat de Laplace getransformeerde van

$$g(t) = f(t - a)\, \mathbb{1}(t - a)$$

gegeven wordt door $G(s) = \mathrm{e}^{-as} F(s)$, waarbij $F(s)$ de Laplace getransformeerde is van $f(t)$.

(c) Bepaal de oplossing $y(t)$ van (4) voor $t \geq 0$ als de ingang gegeven wordt door $u(t) = \delta(t - \pi)$ en de beginvoorwaarden gelijk zijn aan $y(0^-) = 1$, $y^{(1)}(0^-) = -6$.

Normering:

1	a	:	5	2	a	:	4	3	:	16	4	:	9	5	a	:	5
	b	:	6		b	:	8								b	:	5
	c	:	5		c	:	6								c	:	8
	d	:	8		d	:	5										

Totaal: 90 + 10 = 100 punten

Laplacegetransformeerden:

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos(at)$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\delta(t)$	1

Fouriergetransformeerden:

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$	Voorwaarde
$e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{1}{i\omega+a}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$t^n e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$-e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{1}{(i\omega-a)}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$-t^n e^{at}\,\mathbb{1}(-t)$	$\dfrac{n!}{(i\omega-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(a) > 0$
$\mathrm{rect}_a(t)$	$a\,\mathrm{sinc}(a\omega/2)$	$a > 0$
$\delta(t)$	1	
1	$2\pi\delta(\omega)$	
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$	$\omega_0 \in \mathbb{R}$