UNIVERSITEIT TWENTE
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Signalen en Transformaties (156081) op maandag 25 oktober 2010, 8.45 – 11.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

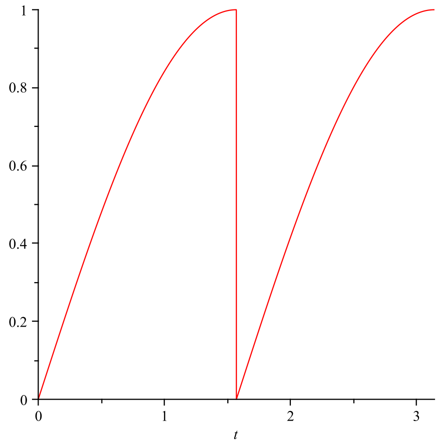
1.

Zij $f(t)$ de π-periodieke functie die voor $t \in [0, \pi)$ wordt gegeven door

$$f(t) = \sin(t)\,\mathbb{1}\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) - \cos(t)\,\mathbb{1}\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

a) Toon aan dat $f(t)$ ook een $\frac{\pi}{2}$-periodieke functie is.

Uit de grafiek van de functie:



kunnen we al wel vermoeden dat de functie $\frac{\pi}{2}$-periodiek is maar dat moeten we nog wel aantonen.

Voor $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ hebben we:

$$\begin{aligned}
f(t + \tfrac{\pi}{2}) &= \sin(t + \tfrac{\pi}{2})\,\mathbb{1}(-t) - \cos(t + \tfrac{\pi}{2})\,\mathbb{1}(t) \\
&= -cos(t + \tfrac{\pi}{2}) \\
&= \sin(t) \\
&= \sin(t)\,\mathbb{1}\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) - \cos(t)\,\mathbb{1}\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

Op vergelijkbare wijze vinden we voor $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ dat:

$$\begin{aligned}
f(t + \tfrac{\pi}{2}) &= f(t - \tfrac{\pi}{2}) \\
&= \sin(t - \tfrac{\pi}{2})\,\mathbb{1}(\pi - t) - \cos(t + \pi)\,\mathbb{1}(t - \pi) \\
&= -\cos(t) \\
&= \sin(t)\,\mathbb{1}\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) - \cos(t)\,\mathbb{1}\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

waar we in de eerste stap gebruik hebben gemaakt van de π-periodiciteit van f. Uit de π-periodiciteit van f volgt dan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ dat:

$$f(t + \tfrac{\pi}{2}) = f(t)$$

en dus is de functie een $\frac{\pi}{2}$-periodieke functie.

b) Toon aan dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ gegeven wordt door: $$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-16k^2)}\left[\cos(4kt) + 4k\sin(4kt)\right]$$

Omdat $T = \frac{\pi}{2}$ hebben we $\omega_0 = 4$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{-4ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_0^{\pi/2} e^{i(1-4k)t} - e^{-i(1+4k)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{i\pi}\left[\frac{1}{i(1-4k)}e^{i(1-4k)t} + \frac{1}{i(1+4k)}e^{-i(1+4k)t}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{1-4k}\left(e^{i\pi/2}-1\right) + \frac{1}{1+4k}\left(e^{-i\pi/2}-1\right)\right] \\
&= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{1-4k}(i-1) + \frac{1}{1+4k}(-i-1)\right] \\
&= \frac{-1}{\pi}\frac{(i-1)(1+4k)-(i+1)(1-4k)}{1-16k^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2-8ki}{1-16k^2}
\end{aligned}$$

We hebben $2f_k = a_k - ib_k$ en dus:

$$a_k = \frac{4}{\pi(1-16k^2)}, \qquad b_k = \frac{16k}{\pi(1-16k^2)}$$

We weten dat de reële Fourierreeks van $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t).$$

en na invullen krijgen we precies de gegeven reële Fourierreeks.

c) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

Voor $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ hebben we:

$$f(t) = \sin t$$

en dus:

$$f'(t) = \cos t$$

Aan de andere kant in $\frac{\pi}{2}$ springt de functie 1 omlaag en we krijgen dus

$$f(t) = \cos(t) - \delta(t + \tfrac{\pi}{2})$$

voor $t \in (0, \frac{\pi}{2}+)$ en dit bepaald de gegeneraliseerde afgeleide volledig omdat we weten dat de gegeneraliseerde afgeleide $\frac{\pi}{2}$-periodiek is.

d) Bepaal het vermogen van f.

Dit kan het makkelijkste in het tijddomein:

$$P_f = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(t)|^2 \, dt$$

dus

$$\begin{aligned}
P_f &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos(2t) \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\tfrac{1}{2} t - \tfrac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

waar ik gebruik heb gemaakt van:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2x)\right).$$

2.

Voor een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = 2\frac{\sin^3(t)}{t^2}$$

a) Bepaal de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem en schets de bijbehorende grafiek van $|\hat{h}(\omega)|$.

We hebben

$$\begin{aligned}
\text{trian}_2(\omega) &\longleftrightarrow \frac{2\sin^2 \omega}{\omega^2} \\
\frac{2\sin^2 t}{t^2} &\longleftrightarrow 2\pi \, \text{trian}_2(\omega) \\
\frac{2\sin^2 t}{t^2} &\longleftrightarrow 2\pi \, \text{trian}_2(\omega)
\end{aligned}$$

volgens de reciprociteitsregel en de tabel. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
e^{it} \frac{2\sin^2 t}{t^2} &\longleftrightarrow 2\pi \, \text{trian}_2(\omega - 1) \\
e^{-it} \frac{2\sin^2 t}{t^2} &\longleftrightarrow 2\pi \, \text{trian}_2(\omega + 1)
\end{aligned}$$

volgens de regel voor verschuiving in het frequentiedomein. Omdat

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

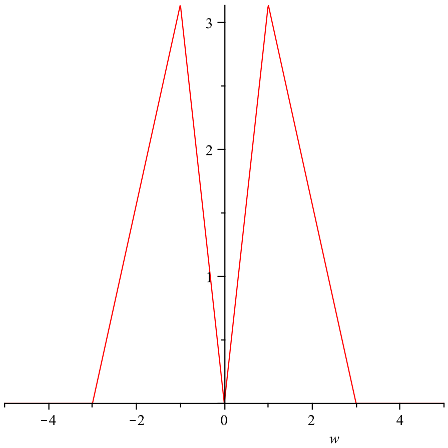
krijgen we:

$$\frac{2\sin^3 t}{t^2} \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left[2\pi\,\mathrm{trian}_2(\omega-1) - 2\pi\,\mathrm{trian}_2(\omega+1)\right]$$
$$\longleftrightarrow \pi i\left[\mathrm{trian}_2(\omega+1) - \mathrm{trian}_2(\omega-1)\right]$$

Hieruit volgt:

$$\hat{h}(\omega) = \pi i\left[\mathrm{trian}_2(\omega+1) - \mathrm{trian}_2(\omega-1)\right]$$

De absolute waarde van $\hat{h}(\omega)$ zijn er dan als volgt uit:



Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = 1 + \sin(t) + \cos(2t) - \sin(3t)$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

$u(t)$ is een periodiek signaal. Als $u(t)$ een periodiek signaal is met Fourierreeks:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

dan hebben we:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k\omega_0) u_k e^{-ik\omega_0 t}$$

In ons geval,

$$u(t) = 1 + \tfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) - \tfrac{1}{2i}\left(e^{3it} - e^{-3it}\right)$$

en dus:

$$y(t) = \hat{h}(0) + \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(1)e^{it} - \hat{h}(-1)e^{-it}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\hat{h}(2)e^{2it} + \hat{h}(-2)e^{-2it}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2i}\left(\hat{h}(3)e^{3it} - \hat{h}(3)e^{-3it}\right)$$

We hebben:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(3) &= \hat{h}(-3) = 0 \\
\hat{h}(2) &= \hat{h}(-2) = -\pi i \\
\hat{h}(1) &= \hat{h}(-1) = -\tfrac{\pi}{2} i \\
\hat{h}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \tfrac{1}{2i}\left(-\tfrac{\pi}{2} i e^{it} - \tfrac{\pi}{2} i e^{-it}\right) + \tfrac{1}{2}\left(-\pi i e^{2it} + \pi i e^{-2it}\right) \\
&= \tfrac{-\pi}{4}\left(e^{it} + e^{-it}\right) + \tfrac{\pi}{2i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) \\
&= \tfrac{-\pi}{2}\cos(t) + \pi \sin(2t)
\end{aligned}$$

en dit is duidelijk een reëel signaal.

3.

> Bepaal de convolutie van $f(t) = e^{-|t|}$ en $g(t) = \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)$ op twee verschillende manieren.

Omdat we geen causale signalen hebben moeten we Fouriertransformatie gebruiken in plaats van Laplacetransformatie.

De Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

We hebben:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \\
\mathbb{1}(t-1) &\longleftrightarrow e^{-i\omega}\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \\
&\longleftrightarrow e^{-i\omega}\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)
\end{aligned}$$

De Fouriergetransformeerde van $g(t)$ is dus gelijk aan:

$$\hat{g}(\omega) = (1 - e^{-i\omega})\frac{1}{i\omega}$$

Als we deze twee stappen combineren zien we dat de Fouriergetransformeerde van $(f \star g)(t)$ gelijk is aan:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = (1 - e^{-i\omega})\frac{2}{i\omega(1+\omega^2)}$$

Via breuksplitsen vinden we:

$$\frac{2}{s(1-s^2)} = \frac{2}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s}$$

met $s = i\omega$ en dus:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = (1 - e^{-i\omega})\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1+i\omega}\right)$$

Om de convolutie te bepalen moeten we nu de inverse Fouriertransformatie toepassen. We hebben:

$$e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \tfrac{1}{1+i\omega}$$
$$e^{t}\,\mathbb{1}(-t) \longleftrightarrow \tfrac{1}{1-i\omega}$$

en dus vinden we:

$$\operatorname{sgn}(t) + e^{t}\,\mathbb{1}(-t) - e^{-t}\,\mathbb{1}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{i\omega(1+\omega^2)}$$

Merk op:

$$\operatorname{sgn}(t) + e^{t}\,\mathbb{1}(-t) - e^{-t}\,\mathbb{1}(t) = \operatorname{sgn}(t)\left(1 - e^{-|t|}\right)$$

Als we ons herinneren dat $e^{-i\omega}$ correspondeert met een verschuiving in het tijddomein krijgen we:

$$\operatorname{sgn}(t)\left(1 - e^{-|t|}\right) - \operatorname{sgn}(t-1)\left(1 - e^{-|t-1|}\right) \longleftrightarrow (1 - e^{-i\omega})\frac{2}{i\omega(1+\omega^2)}$$

De convolutie is dus gelijk aan:

$$\operatorname{sgn}(t)\left(1 - e^{-|t|}\right) - \operatorname{sgn}(t-1)\left(1 - e^{-|t-1|}\right)$$

We kunnen dit ook rechtstreeks via de definitie berekenen:

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}\left[\mathbb{1}(\tau) - \mathbb{1}(\tau-1)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^1 e^{-|t-\tau|}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Als $t > 1$ hebben we dat $t - \tau > 0$ in $[0,1]$ en we krijgen:

$$\int_0^1 e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau = e^{-t+1} - e^{-t}$$

en als $t < 0$ hebben we dat $t - \tau > 0$ in $[0,1]$ en we krijgen:

$$\int_0^1 e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = e^{t} - e^{t-1}$$

Tot slot voor $t \in [0,1]$ krijgen we:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-|t-\tau|}\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_t^1 e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= (1 - e^{-t}) - (e^{t-1} - 1) \\ &= 2 - e^{-t} - e^{-t-1}\end{aligned}$$

Als we deze twee gevallen samenvoegen krijgen we:

$$
\begin{aligned}
(f \star g)(t) &= \begin{cases} e^{-t+1} - e^{-t} & t > 1 \\ 2 - e^{-t} - e^{-t-1} & t \in [0,1] \\ e^{t} - e^{t-1} & t < 0 \end{cases} \\
&= \operatorname{sgn}(t)(1 - e^{-|t|}) - \operatorname{sgn}(t-1)(1 - e^{-|t-1|})
\end{aligned}
$$

Dat laatste is eenvoudig te controleren en laat zien dat er hetzelfde uit komt als via de Fouriertransformatie.

4.

> Drie studenten zijn het college aan het nabespreken. Ze bestudeerden de functies:
>
> $$f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \text{ en } g(t) = \cos(t).$$
>
> Volgens Ron was de convolutie van deze twee functies goed gedefinieerd omdat beide functies begrensd zijn. Harry zei dat je de convolutie het beste kon berekenen via de Fouriertransformatie en hij kreeg:
>
> $$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \pi^2 \operatorname{rect}_2(\omega)\left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right] = \frac{\pi^2}{2}\left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right]$$
>
> en dus is de convolutie gelijk aan
>
> $$\frac{\pi}{2}\cos(t).$$
>
> Volgens Hermione is er toch iets raars aan de hand want als je de convolutie rechtstreeks uitrekent komt er iets uit van de vorm:
>
> $$A \sin t + B \cos t$$
>
> maar de uitdrukking die zij krijgt voor A is:
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\tau)}{\tau}\, \mathrm{d}\tau$$
>
> waarvan zij beweert dat die niet bestaat. Ze beweert bovendien dat Harry een fout heeft gemaakt die misschien de oorzaak is van deze discrepantie.
> Geef voor elk van de studenten aan of ze gelijk dan wel ongelijk hebben en waarom.

Ron heeft in ieder geval ongelijk. Een goede definitie voor de convolutie volgt als één signaal begrensd is en het andere signaal absoluut integreerbaar. Beide begrensd is niet voldoende wat al snel blijkt als je de convolutie probeert uit te rekenen voor de constante functie 1 met zich zelf. We kunnen hier dus problemen verwachten omdat zowel f als g niet absoluut integreerbaar zijn.

Harry gebruikt de goede afleiding als de convolutie goed gedefinieerd zou zijn echter hij gebruikt dat:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rect}_2(\omega)\delta(\omega-1) &= \operatorname{rect}_2(1)\delta(\omega-1) \\
\operatorname{rect}_2(\omega)\delta(\omega+1) &= \operatorname{rect}_2(-1)\delta(\omega-1)
\end{aligned}
$$

en die rekenregel mag volgens het dictaat alleen worden gebruikt als de functie rect_2 continu is in 1 (voor de eerste formule) en -1 (voor de tweede formule). Dat is niet zo en dus heeft Ron ongelijk.

Hermione heeft gelijk dat er in Harry's afleiding een fout staat. Als je naar de rechtstreekse definitie van de convolutie kijkt krijg je:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\tau)}{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\tau)}{\tau}\left[\cos(t)\cos(\tau)-\sin(t)\sin(\tau)\right]\,d\tau\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\tau)\cos(\tau)}{\tau}d\tau\right)\cos(t)+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\tau)}{\tau}d\tau\right)\sin(t)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\tau)}{2\tau}d\tau\right)\cos(t)+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\tau)}{\tau}d\tau\right)\sin(t)\end{aligned}$$

en we zien inderdaad een antwoord zoals voorspelt door Hermione. De integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\tau)}{\tau}d\tau$$

bestaat inderdaad niet. Je kunt dat zien doordat voor een geheeltallige k groter dan nul we hebben dat:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2(\tau)}{\tau}d\tau > \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2(\tau)}{(k+1)\pi}\,d\tau = \frac{1}{2(k+1)}$$

en dus

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin^2(\tau)}{\tau}d\tau > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2(k+1)} = \infty$$

Hermione heeft dus volledig gelijk.

5.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t)+y(t)=u^{(1)}(t)-u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

We hebben omdat alle begincondities nul zijn

$$s^2Y(s)+Y(s)=sU(s)-U(s)$$

en dus:

$$Y(s)=\frac{s-1}{s^2+1}U(s)$$

We vinden de impulsresponsie door de inverse Laplace transformatie los te laten op de overdrachtsfunctie

$$H(s)=\frac{s-1}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$$

We krijgen dan dat de impulsresponsie gelijk is aan:

$$h(t)=(\cos t-\sin t)\,\mathbb{1}(t)$$

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

We hebben voor $t > 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{0-}^{t} (\cos t - \sin t)\, \mathbb{1}(\tau)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0-}^{t} \cos t - \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= [\sin t + \cos t\,]_0^t \\ &= \sin t + \cos t - 1 \end{aligned}$$

We krijgen dus:

$$g(t) = (\sin t + \cos t - 1)\, \mathbb{1}(t)$$

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \cos(2t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = 0$.

Als de begincondities niet nul zijn krijgen we:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &\longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\ y^{(2)}(t) &\longleftrightarrow s(sY(s) - 1) - y'(0^-) = s^2Y(s) - s \end{aligned}$$

We hebben:

$$(s^2 + 1)Y(s) - s = (s - 1)U(s)$$

met

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

en dus

$$(s^2 + 1)Y(s) = s + \frac{s(s-1)}{s^2 + 4}$$

Dus:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s(s-1)}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

Om A, B, C en D te bepalen brengen we alles onder één noemer en we krijgen:

$$s(s - 1) = (As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)$$

en we vinden

$$A = -\tfrac{1}{3}, \quad B = \tfrac{1}{3}, \quad C = -\tfrac{1}{3}, \quad D = \tfrac{4}{3},$$

en dus:

$$Y(s) = \tfrac{1}{3}\left[\frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4}\right]$$

en we vinden:

$$y(t) = \tfrac{1}{3}\,[2\cos(t) - \sin(t) + \cos(2t) + 2\sin(2t)]\, \mathbb{1}(t)$$