UNIVERSITEIT TWENTE

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Signalen en Transformaties (201100109) op maandag 20 januari 2014, 13.45 - 16.45 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Bij dit tentamen mag U een eigen, handgeschreven, formuleblad (A4) gebruiken. Een grafische of programmeerbare rekenmachine is niet toegestaan.

---

1. Zij $f(t)$ de 2-periodieke functie die voldoet aan:

$$f(t) = e^t \quad \text{voor } t \in [0,1]$$

en waarvan bovendien gegeven is dat de functie even is.

a) Toon aan dat de complexe Fouriercoëfficiënten van $f(t)$ gelijk zijn aan:

$$f_k = \frac{(-1)^k e - 1}{\pi^2 k^2 + 1}$$

b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

c) Is f gelijk aan de complexe Fourierreeks voor alle $t \in \mathbb{R}$?

d) Bereken de gegeneraliseerde afgeleide $f'(t)$ van $f(t)$.

e) Bepaal het vermogen van f.

2. Voor een filter wordt de stapresponsie $g(t)$ gegeven door

$$g(t) = \text{trian}_2(2t-1)$$

a) Laat zien dat de frequentieresponsie $\hat{h}(\omega)$ van het systeem gegeven wordt door

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\left(2e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2} - e^{-i3\omega/2}\right)$$

Aan het systeem wordt een ingangssignaal

$$u(t) = \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - \tfrac{1}{2}$$

toegevoerd. Zij $y(t)$ de responsie van het systeem op het gegeven ingangssignaal $u(t)$.

b) Bereken de responsie $y(t)$ en toon aan dat $y(t)$ een reëel signaal is.

3. Bepaal de convolutie van $f(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$ en $g(t) = \cos(t)$ op twee verschillende manieren.

z.o.z.

4. We bekijken de ruimte ℓ^2 van reëelwaardige rijtjes

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

waarvoor geldt:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} < \infty$$

met de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ gedefinieerd door:

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots) = \mathcal{A}x = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_5 + x_6, \ldots)$$

dat wil dus zeggen $y_k = x_{2k-1} + x_{2k}$.

a) Bepaal ker $\mathcal{A}$,

b) Bepaal $\|A\|$.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y^{(2)}(t) - 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u^{(1)}(t) + u(t). \tag{1}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van (1).

b) Bepaal de stapresponsie van (1).

c) Als ingang kiezen we $u(t) = \cosh(t)$. Bepaal de oplossing voor $t > 0$ van (1) met $y(0^-) = 1$ en $y'(0^-) = -1$.

Hint: $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk 1.	12 punten	Vraagstuk 3.	9 punten	Vraagstuk 5.	11 punten
Vraagstuk 2.	12 punten	Vraagstuk 4.	10 punten		

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 6 punten op te tellen en dan door 6 te delen.

Formuleblad Signalen en Transformaties (201100109)

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformaties

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{a}{2} \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2\sin(\frac{a\omega}{2})}{\omega}$
$\text{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a} & \text{voor } \lvert t\rvert < a \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4\sin^2(\frac{a\omega}{2})}{a\omega^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\text{Re}\,a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\,\mathbb{1}(t)$, $\text{Re}\,a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
e^{-at^2}, $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{(\frac{-\omega^2}{4a})}$
$\delta(t)$	1
$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

Tabel Laplace transformaties

$$\boxed{F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$ éénzijdige Laplace transformatie

$f(t)$	$F(s)$	conv. abscis
$e^{at}\,\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}\,a$
$\frac{t^n}{n!}e^{at}\,\mathbb{1}(t),\ \ n = 0,1,2,\ldots$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\,a$
$\cos(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
$\sin(bt)\,\mathbb{1}(t),\ \ b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Rekenregels

Fourierreeksen (periode T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$)

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-ik\omega_0\tau} f_k \\
e^{in\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow f_{k-n} \qquad (n \text{ geheel})
\end{aligned}$$

Fourier transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \\
f(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \qquad (t_0 \in \mathbb{R}) \\
e^{i\omega_0 t} f(t) &\longleftrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0) \qquad (\omega_0 \in \mathbb{R}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega) \\
\hat{f}(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)
\end{aligned}$$

Laplace transformatie

$$\begin{aligned}
f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\
f(t-t_0)\,\mathbb{1}(t-t_0^-) &\longleftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0 \geq 0) \\
e^{s_0 t} f(t) &\longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad (s_0 \in \mathbb{C}) \\
f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$