Inhoudsopgave:

(1)

FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL11.015/lw
Datum: 8 april 2011

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (191530881)

Dinsdag 12 april 2011, 8.45 – 11.45 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
2. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
3. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
4. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (8 punten)

Een potentiële langstudeerder van de opleiding TBK heeft zijn B-opdracht afgerond en, zeer tot zijn opluchting, ook SMOM gehaald. Hem resten het laatste kwartiel van dit studiejaar nog 3 lastige vakken, te weten A, B en C. Hij wil alles op alles zetten om, naast zijn werk bij Stress en AH, die vakken dit studiejaar nog af te ronden. Hij besluit zijn sociale verplichtingen op een laag pitje te zetten, zodat hij 40 uur per week kan studeren. Hij heeft een inschatting gemaakt van de kansen dat hij een bepaald vak zal halen als functie van de tijd die hij er in investeert. Hij kan aan een vak wekelijks 0, 1,..., 5 dagen besteden. Neem aan dat het aantal dagen dat hij aan een bepaald vak besteedt van week tot week hetzelfde is (dus bijvoorbeeld: hij besteedt het gehele kwartiel 2 dagen aan vak A elke week). De slaagkansen voor een bepaald vak bij de verschillende niveau's van inspanning staan in de volgende tabel:

Aantal dagen	Slaagkans A	Slaagkans B	Slaagkans C
0	.20	.25	.10
1	.40	.50	.30
2	.60	.60	.45
3	.75	.70	.55
4	.80	.75	.65
5	.85	.80	.70

De student wil zijn tijd zodanig over de vakken verdelen dat de kans dat hij geen enkel vak haalt zo klein mogelijk is. Hij besluit zijn bij SMOM opgedane kennis in praktijk te brengen en dit probleem op te lossen met stochastische dynamische programmering. Hij komt tot de conclusie dat hij 5 dagen per week aan vak A moet besteden. De student voelt wel aan dat dit niet de optimale oplossing is, maar hij kan de fout in zijn model niet vinden. Hij vraagt jullie om hulp.

1

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat kies je als:
   - fasen
   - toestanden
   - beslissingen
   - optimale-waardefunctie?
b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waardefunctie.
c) Los het probleem op via dynamische programmering. (Er hoeft geen *policy table* gegeven te worden.)

Opgave 2 (10 punten)
Een machine kan zich aan het begin van een maand in vier toestanden bevinden: goed, redelijk, matig en slecht. De opbrengst van de productie van de machine (in euro's), afhankelijk van de toestand waarin die zich bevindt aan het begin van de maand, bedraagt per maand: 200 (goed), 150 (redelijk), 100 (matig) en 20 (slecht).
Aan het *eind* van iedere maand kan de machine onderhouden of vervangen worden. Indien de machine aan het begin van de maand in goede staat verkeert, dan wordt nooit onderhoud verricht en de machine wordt uiteraard ook niet vervangen aan het eind van de maand. Indien de machine aan het begin van de maand in redelijke staat verkeert, dan wordt aan het eind van de maand gekozen voor klein onderhoud (kosten 20 euro) of geen onderhoud. Als gekozen wordt voor klein onderhoud, dan is de machine aan het begin van de volgende maand weer in goede staat. Indien de machine aan het begin van de maand in matige staat verkeert, dan kan aan het eind van de maand gekozen worden voor: geen onderhoud, klein onderhoud of groot onderhoud (kosten 100 euro). Bij klein onderhoud is de toestand van de machine aan het begin van de volgende maand redelijk, bij groot onderhoud goed. Indien de machine aan het begin van de maand in slechte staat verkeert, dan kan aan het eind van de maand gekozen worden voor: klein onderhoud, groot onderhoud of vervanging (kosten 300 euro). Bij klein onderhoud is de toestand van de machine aan het begin van de volgende maand matig, bij groot onderhoud redelijk. Vervanging zorgt er uiteraard voor dat de toestand aan het begin van de volgende maand goed is. Als er geen onderhoud wordt verricht, dan zijn de overgangskansen als volgt:

van \ naar	goed	redelijk	matig	slecht
goed	0.8	0.2	0	0
redelijk	0	0.6	0.4	0
matig	0	0	0.2	0.8
slecht	0	0	0	1

De directie vraagt zich af wat de optimale onderhoudsstrategie is die de verwachte verdisconteerde opbrengsten minus kosten over een oneindige horizon maximaliseeert bij een verdisconteringsfactor van $\beta = 0.8$ per maand.

a) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe opbrengsten minus kosten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.
b) Formuleer de optimaliteitsvergelijking voor de optimale-waardefunctie V(i).
c) Voer twee slagen uit van het successieve-approximatie (*value iteration*) algoritme, d.w.z. bepaal $V_1(i)$ en $V_2(i)$, uitgaande van $V_0(i) = 0$. Bepaal in elke stap de bijbehorende kandidaat-strategie.

Veronderstel dat het bedrijf de volgende onderhoudsstrategie hanteert voor de machine: er wordt geen onderhoud verricht als de machine zich aan het begin van de maand in goede of redelijke staat bevindt, er wordt klein onderhoud verricht indien de machine in matige staat verkeert en groot onderhoud indien de machine in slechte staat verkeert.

d) Wat zijn de verwachte verdisconteerde opbrengsten voor elke begintoestand bij deze strategie/politiek?
e) Gebruik *policy iteration* om te laten zien dat de gegeven politiek niet optimaal is.

Opgave 3 (10 punten)
Het werkcollege SMOM op vrijdagmiddag wordt slecht bezocht. Er zijn slechts 4 studenten aanwezig. Deze studenten zijn echter wel serieus bezig. Ze hebben regelmatig vragen die door de docent volgens het FIFO principe worden beantwoord. Neem aan dat de door elke individuele student gestelde vragen gegenereerd worden door een Poisson proces met intensiteit λ per uur. Het beantwoorden van een vraag vergt een een negatief exponentieel verdeelde tijdsduur met een gemiddelde van $1/\mu$ uur. Als er drie of meer vragen zijn, dan wordt de docent zenuwachtig en geeft kortere antwoorden, de gemiddelde beantwoording van een vraag vergt dan $1/(2\mu)$ uur. Door de kortere antwoorden neemt het aantal vragen echter niet toe. (Wellicht moet de docent zich in de volgende collegecyclus sowieso beperken tot kortere antwoorden.)

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen. Voor welke waarden van λ en μ is het systeem stabiel?

De antwoorden op de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in λ, μ en de evenwichtskansen uit onderdeel b).

c) Wat is het gemiddelde aantal studenten van wie de vraag nog niet beantwoord is (dus inclusief de student van wie de docent de vraag aan het beantwoorden is)?
d) Wat is de gemiddelde <u>wachttijd</u> van een student met een vraag?
e) Hoeveel vragen beantwoordt de docent gemiddeld per uur?
f) Wat is de gemiddelde lengte van een interval waarin de docent onafgebroken vragen beantwoordt?

1

Opgave 4 (8 punten)
Beschouw een Markov keten met de volgende overgangskansen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markovketen.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 2 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m jobs in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende jobs. De gemiddelde bedieningsrate (per tijdseenheid) in de verschillende stations bedraagt resp. $\mu_1 = 3/10$, $\mu_2 = 2/10$, $\mu_3 = 3/10$ en $\mu_4 = 6/10$.

c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* de gemiddelde verblijftijd van een job bij elk van de 4 stations in het geval dat $m = 2$. (Hint: laat breuken staan)
d) Neem weer aan dat $m = 2$. Laat zien dat uit het algoritme van Buzen volgt dat $C_4(2) = 23/4$. Wat is de bezettingsgraad van machine 1?

(2)

Kenmerk: EWI10/TW/SOR/RB/01
Datum: 8 April 2010

(B)

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Dinsdag 13 april 2010, 8:45 – 11:45 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Eindcijfer = (aantal behaalde punten+10)/10. Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

Opgave 1 (20 punten)

Chocoladefabriek S&P, gespecialiseerd in de productie van chocolade Sinterklazen en Paashazen, is benaderd door warenhuis HAME, dat wil starten met de verkoop van chocolade Sinterklazen, om exclusief voor HAME de productie van chocolade Sinterklazen te verzorgen. S&P's huidige jaarlijkse winst bedraagt 1 miljoen euro. Het voorstel van HAME zal een bijdrage tot de winst geven ter grootte van 200.000 euro. Tegelijkertijd kan S&P niet meer onder eigen naam chocolade Sinterklazen verkopen (maar nog wel chocolade Paashazen), waardoor de huidige winst van S&P met 25% zal dalen met kans 0.1, 30% zal dalen met kans 0.6 en 35% zal dalen met kans 0.3. Indien S&P niet op HAMEs voorstel ingaat zal een concurrent met kans 0.4 op dit voorstel ingaan. In dat geval zal de winst van S&P op dezelfde wijze dalen, tenzij S&P een mooiere soort Sinterklazen zal gaan produceren of de prijs van haar chocolade Sinterklazen verlaagt. Opstarten van de productie van een nieuwe soort Sinterklazen kost 100.000 euro, met als resultaat dat de huidige winst slechts 10% daalt met kans 0.2, 15% met kans 0.7 of 20% met kans 0.1. De prijsverlaging heeft als resultaat dat de winst daalt met 10% met kans 0.1, 15% met kans 0.8 en 20% met kans 0.1. Wanneer S&P besluit tot prijsverlaging, kan de concurrent dat ook doen. De kans dat de concurrent tot prijsverlaging besluit is 0.5. In dat geval zal de winst 10% dalen met kans 0.1, 15% dalen met kans 0.6 en 20% dalen met kans 0.3.

Construeer voor dit probleem een beslisboom en bepaal een optimale beslispolitiek voor S&P.

2

Opgave 2 (25 punten)
Bij de productie van vliegtuigen worden onderdelen gebakken in een speciaal daarvoor bestemde bakoven. De productie in deze bakovens vindt plaats door middel van zogeheten productie-runs, welke een volle dag duren. Vindt op een dag een productie-run plaats dan worden alle aanwezige onderdelen, met een maximum van drie, in de oven gebakken om vervolgens te worden getransporteerd naar een volgende afdeling. Liggen aan het begin van een dag drie of meer onderdelen te wachten dan wordt altijd een productie-run gestart. Liggen er een of twee onderdelen te wachten dan heeft men de keuze om die dag al of niet te produceren.
Het aankomstproces van onderdelen is stochastisch: iedere dag komt 1 onderdeel aan met kans 2/3 of geen onderdeel met kans 1/3. Een onderdeel arriveert aan het begin van de dag voor de start van een productie-run, maar na het moment waarop besloten wordt al dan niet een productie-run te starten. Een aan het begin van de dag gearriveerd onderdeel zal wel worden meegenomen in de productie-run, indien daarmee het maximum van 3 onderdelen niet wordt overschreden.
Aan het begin van dag 1, voor een eventuele aankomst van een onderdeel zijn niet meer dan 2 onderdelen aanwezig. De kosten van een productie-run bedragen 1000 euro. De kosten van onderhanden werk (onderdelen die liggen te wachten tot de start van een productie-run) bedragen 100 euro per dag per onderdeel aanwezig aan het begin van de dag, inclusief een eventueel gearriveerd onderdeel.

Gezocht wordt een optimale productiepolitiek, welke de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. De disconteringsfactor bedraagt 3/4 per dag.

a. Verklaar waarom op het beslismoment voor al dan niet draaien productie-run aan het begin van de dag nooit meer dan drie onderdelen voor de oven liggen te wachten.
b. Bepaal de toestanden, de beslissingen in die toestanden, de directe kosten als functie van de toestand en gekozen beslissing, en de overgangskansen behorend bij dit Markov beslissingsprobleem.
c. Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen voor dit probleem.
d. Hoeveel stationaire politieken zijn er? Verklaar uw antwoord.
e. Onderzoek m.b.v. het politiek (strategie) iteratie algorithme of de politiek welke pas een productie-run start als er drie onderdelen liggen te wachten optimaal is.
f. Formuleer een LP probleem waarmee de optimale stationaire politiek bepaald kan worden. Hoe wordt deze politiek na oplossing van het LP model gevonden?

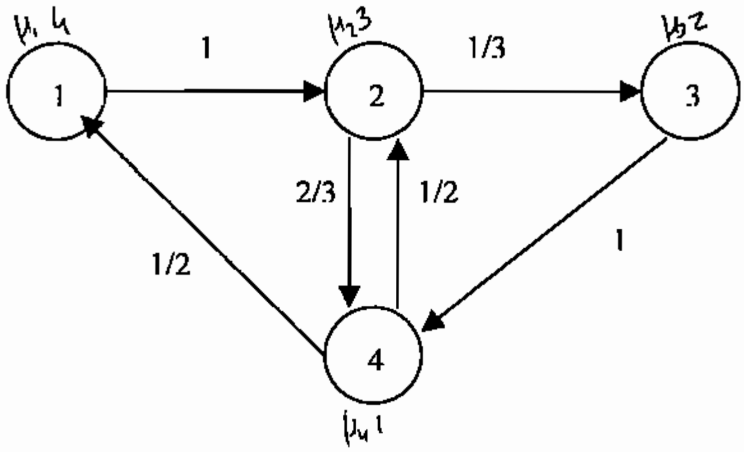
Opgave 3 (25 punten)
Een productiesysteem bestaat uit drie machines: 2 identieke van type A en 1 van type B. Deze machines vallen frequent uit, waardoor er permanent een onderhoudsmonteur beschikbaar wordt gehouden. De machine van type B is zo belangrijk, dat deze in geval van uitval direct door de monteur wordt gerepareerd, ook indien deze bezig was met repareren van een machine van type A. In dit geval zal na reparatie van de type B machine de reparatie van de type A machine worden afgemaakt. De reparatietijden zijn exponentieel verdeeld met gemiddelden 6 en 3 minuten voor respectievelijk de typen A en B. De tijd die verstrijkt tussen einde van een reparatie van een machine en het eerstvolgende moment dat deze weer uitvalt is voor A en B eveneens exponentieel verdeeld met respectievelijke gemiddelden van 30 en 15 minuten.

a) Verklaar waarom niet is vermeld wat de verdeling is van de resterende reparatieduur van een type A machine waarvan de reparatie wordt onderbroken.
b) Teken het transitiediagram voor het proces $\{(X(t),Y(t)\}$, waarin $X(t)$ het aantal defecte A-machines is en $Y(t)$ het aantal defecte B-machines. Druk de intensiteiten uit in aantallen per uur.
c) Formuleer de evenwichtsvergelijkingen voor de stationaire kansen $P(i,j)$ van het proces $\{(X(t),Y(t)\}$. [Oplossing wordt niet gevraagd!]
d) Wat verandert er in het transitiediagram in b) wanneer er twee monteurs aanwezig zouden zijn, die niet samen aan 1 machine kunnen werken?

We beschouwen nu weer het geval met 1 monteur. De antwoorden van de volgende vragen mogen worden uitgedrukt in de $P(i,j)$'s.

e) Bepaal het gemiddelde aantal defecte A-machines dat op reparatie wacht.
f) Hoe groot is de bezettingsgraad van machine B? Wat gebeurt er met dit antwoord indien er slechts 1 machine van type A zou zijn? [Verklaar uw antwoord.]
g) Stel dat de machines van type A en B respectievelijk 50 en 100 producten per uur kunnen produceren. Hoeveel A- en B-producten worden gemiddeld per uur geproduceerd?
h) Hoe groot is het gemiddeld aantal uitvallen per uur voor beide typen machines en wat zijn de gemiddelde wachttijden voor beide typen?
i) Hoe groot is de gemiddelde tijd tussen twee opeenvolgde uitvallen voor beide typen?
j) Wat is de kansverdeling van een aaneengesloten periode waarin alle machines defect zijn?

Opgave 4 (20 punten)
Beschouw de Markov keten uit onderstaande figuur. De getallen langs de pijlen geven de overgangskansen tussen de vier toestanden.



a) Bepaal de stationaire kansverdeling van deze Markov keten.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 4 te bereiken, en het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 4 voor het eerst toestand 1 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als gesloten netwerk van wachtrijen. We spreken nu van stations in plaats van toestanden. Ieder station bezit één server, en iedere aankomende klant kan worden opgenomen in de wachtrij. Bediening is in volgorde van binnenkomst. De bedieningsduren bij de stations zijn exponentieel verdeeld, en de verwachte bedieningsduren in de vier stations zijn respectievelijk 4, 3, 2, en 1 minuut.

c) Bepaal m.b.v. het algorithme van Buzen voor een netwerk dat twee klanten bevat de kans dat er (n_1,n_2,n_3,n_4) klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations.
d) Bepaal m.b.v. Mean Value Analyse het verwachte aantal klanten en de verwachte verblijftijd in de vier stations voor het geval waarin het netwerk 1 klant bevat en voor het geval waarin het netwerk 2 klanten bevat.
e) Wat is de bezettingsgraad van station 1 voor het geval waarin het netwerk 1 klant bevat en voor het geval waarin het netwerk 2 klanten bevat?

1→4 nodig $1 + M_{kj}$ stappen

b) Mean first passage time: $\cdot \rho_{14}$ → p_{ij} 1 step nodig van i voor j
$\cdot \rho_{41}$ $k \neq j$ → p
$M_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}(M_{kj})$
$M_{14} = 1 +$

$M_{ij} = 1 + M_{kj}$

$M_{14} = (1) + M_{24} + M_{34}$

of $M_{14} = (1) + p_{12} M_{24} + p_{23} M_{34}$
$= 1 + 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2$

$M_{41} = 1 + M_{21}$

of $M_{41} = 1 + p_{42} M_{23} + p_{24} M_{41}$

$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1}$

$= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 2$

2

Opgave 4.

a) $\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_4$

$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_4 + \pi_1$

$\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \quad \xrightarrow{2^e} \quad \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_4$

$\pi_4 = \pi_3 + \frac{2}{3}\pi_2 \quad \xrightarrow{1^e} \quad \pi_4 = \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_2 \quad \rightarrow \pi_4 = \pi_2$

$\frac{1}{2}\pi_4 + \pi_4 + \frac{1}{3}\pi_4 + \pi_4 \Rightarrow \frac{17}{6}\pi_4 = 1 \qquad \pi_4 = \frac{6}{17}$

dus $\pi_1 = \frac{3}{17}$

$\pi_2 = \frac{6}{17}$

$\pi_3 = \frac{2}{17}$

SOM = 1

b) VAN 1 → 4 nodig $1 + M_{kj}$ stappen → $M_{ij} = 1 + M_{kj}$

$m_{14} = 1 + M_{24} + M_{34}$

of $M_{14} = 1 + p_{12} \cdot M_{24} + p_{23} M_{34}$

$= 1 + 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2$

$m_{41} = 1 + p_{42} M_{23} + p_{24} M_{41}$

$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 2$

verwachte aantal overgangen dat nodig is om voor het eerst toestand ~~4 ent~~ 4 / 1 te bereiken!

3

100

FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL09.025/lw
Datum: 19 juni 2009

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Vrijdag 26 juni 2009, 13.30-16.30 uur

Opmerkingen vooraf:
1. Gelieve het blok **bovenaan** het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen **is niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**
6. **De opgaven moeten aan het eind van het tentamen ingeleverd worden.**

Opgave 1 (10 punten)

Onderneming A maakt precisie-onderdelen die door klant B ingebouwd worden in meetapparatuur die gebruikt wordt binnen de electrotechnische industrie. Het gaat in deze opgave om het onderdeel C dat aan stringente eisen moet voldoen. De kans dat een geproduceerd onderdeel C goed is, d.w.z. voldoet aan alle eisen is gelijk aan 0.5. Om die reden maakt onderneming A meer onderdelen dan gevraagd worden door klant B, in de hoop dat er dan in elk geval voldoende goede onderdelen bij zitten.

Neem aan dat klant B één onderdeel C besteld heeft. Onderneming A kan maximaal 3 productieruns draaien vóór het aflevertijdstip. In een productierun kan een variabel aantal onderdelen C geproduceerd worden (bijv. 4 stuks in de eerste run en 6 in de tweede en derde run). De setup-kosten voor een productierun bedragen 300 GE (geldeenheden). De variabele productiekosten voor een onderdeel C bedragen 100 GE. In een productierun kunnen maximaal 6 onderdelen geproduceerd worden. Indien onderneming A er niet in slaagt om één goed onderdeel C te produceren op tijd, dan moet zij een boete betalen aan klant B ter grootte van 1600 GE. Neem aan dat bij een productierun ter grootte n de kans dat k van de n geproduceerde onderdelen goed zijn, gegeven wordt door een binomiale verdeling met succeskans 0.5, dus

P(k onderdelen goed in een batch ter grootte n) = $n!*(0.5)^k*(0.5)^{n-k}/[k!*(n-k)!]$

Bepaal m.b.v dynamische programmering een strategie m.b.t. de optimale grootte van de productieruns die de totale kosten voor onderneming A minimaliseert.

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmerings-probleem. Wat kies je als:

- fasen
- toestanden
- beslissingen
- optimale-waarde functie.

b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waarde functie.
c) Los het probleem op via dynamische programmering. Beschrijf de optimale strategie.
d) De eis dat een productierun uit maximaal 6 onderdelen bestaat is overbodig. Laat dit zien voor fase 3. (Hint: $\ln(2) = 0.69$, $0.5^x = \exp(-x\ln(2))$)

Opgave 2 (7 punten)
De wekelijkse vraag naar een bepaald product is stochastisch. De vraag in een bepaalde week is gelijk aan 1 of aan 2 eenheden, elk met kans 0.5. De voorraad van het product wordt elke maandagochtend gecontroleerd. Indien een bestelling wordt geplaatst ter grootte van x eenheden, dan zijn de bestelkosten gelijk aan $8 + 2x$ geldeenheden (GE). De levertijd is verwaarloosbaar, dus producten die maandagochtend besteld worden, zijn tijdig binnen om gebruikt te kunnen worden om aan de vraag gedurende die week te voldoen. Er moet altijd volledig aan de vraag voldaan worden. De voorraadruimte is geschikt voor maximaal 2 eenheden. De voorraadkosten over de eindvoorraad bedragen 2 GE per eenheid per week.
Gevraagd wordt wat een optimale bestelstrategie is die de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert (bij een verdisconteringsfactor van 0.8).

a) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe kosten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.
b) Formuleer de optimaliteitsvergelijking.
c) Gebruik *policy iteration* om te bepalen of de strategie waarbij zo weinig mogelijk wordt besteld elke week optimaal is.
d) Pas 2 stappen toe van het waarde-iteratie algoritme.

Opgave 3 (11 punten)
Bij een kleine drogisterij werken een caissière en een vakkenvuller. Normaliter vervullen ze allebei hun eigen taak. Maar als het erg druk is aan de kassa, dan springt de vakkenvuller bij en opent een tweede kassa. Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ per uur bij de kassa. Als er 8 klanten bij de kassa's staan (inclusief degenen die geholpen worden), dan vinden andere klanten het te druk om aan te sluiten en zij verlaten de drogisterij om bij de concurrent 150 meter verderop hun inkopen te doen. De eigenaar van de drogisterij heeft de indruk dat er veel klanten weglopen en is daar niet blij mee. Hij heeft tegen de caissière gezegd dat ze wat sneller moet werken. Zij neemt dit (deels) ter harte. Normaliter is de gemiddelde bedieningsduur van een klant door de caissière negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van μ^{-1} uur. Zodra er 2 klanten in de *wacht*rij staan, verhoogt zij haar tempo met 25%. Indien er 4 klanten in de *wacht*rij staan, dan springt de vakkenvuller bij en opent de tweede

kassa. Zijn tempo ligt wat lager. De bedieningsduur van een klant door hem is ook negatief exponentieel verdeeld, maar met een gemiddelde van $(3\mu/4)^{-1}$ uur. De kassa's staan naast elkaar en alle klanten staan in één wachtrij. Zodra het aantal wachtende klanten weer tot 3 is gereduceerd, gaat de vakkenvuller verder met zijn eigen werk. Zonodig neemt de caissière de klant over die de vakkenvuller op dat moment aan het bedienen is.

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen.

De antwoorden van de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in de evenwichtskansen uit onderdeel b).

c) Hoe lang wacht een klant gemiddeld bij de kassa?
d) Welke fractie van de tijd is de vakkenvuller bezig aan de kassa?
e) Hoeveel klanten worden per uur gemiddeld geholpen door de caissière?
f) Hoe groot is de gemiddelde duur van een bezetperiode aan de kassa waar de caissière werkt?

Opgave 4 (8 punten)
Beschouw een Markov keten met de volgende overgangskansen:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Teken deze Markov keten. Zijn er toestanden die *transient* zijn? Toestanden die periodiek zijn?
b) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markov keten.
c) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 3 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m klanten in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende klanten. De gemiddelde bedieningsrate (per tijdseenheid) in de verschillende stations bedraagt resp. $\mu_1 = 12/101$, $\mu_2 = 30/101$, $\mu_3 = 20/101$ en $\mu_4 = 20/101$.

3

d) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* de gemiddelde verblijftijd van een klant bij elk van de 4 stations in het geval dat m = 2. (Hint: laat breuken staan)
e) Neem weer aan dat m = 2. Gegeven is dat $\lambda_2 = 20/67$. Bepaal het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid bediend wordt bij station 4.

4

FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL09.010/lw
Datum: 6 april 2009

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Dinsdag 14 april 2009, 9.00-12.00 uur

Opmerkingen vooraf:
1. Gelieve het blok **bovenaan** het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (8 punten) zie zaak voor uitleg
Je doet mee aan een quiz, en belandt in de finale met een bedrag in kas van € 3750. In deze finale kun je d.m. v. een gokspelletje je bedrag nog enigszins verhogen. Dit spelletje bestaat uit maximaal drie beurten. Bij iedere beurt mag ~~je besluiten te stoppen~~, om daarmee het bedrag in kas te incasseren. Zo niet, dan moet je aan een speciaal rad draaien om te bepalen met hoeveel je bedrag zal worden opgehoogd. Je loopt daarbij echter het risico op BLUT te belanden, waardoor je al je geld kwijtraakt (maar nog wel mag doorspelen). Je vraagt je af wat te doen teneinde je verwachte eindbedrag te maximaliseren. Het rad ziet er (schematisch) als volgt uit:

Uitkomst	€ 250	€ 500	€ 1000	BLUT
Kans	0.4	0.3	0.2	0.1

Je kunt dit probleem oplossen m.b.v. een stochastisch DP-formulering. Definieer hiertoe $f_n(x)$ als je maximale verwachte eindbedrag indien je € x in kas hebt na de n^e beurt.

a) Benoem de fasen, toestanden en beslissingen in bovenstaande formulering. Geef bovendien de toestandsruimte in elke fase.
b) Beargumenteer dat $f_2(x)=x$ voor $x \geq 4500$ en $f_2(x) = 0.9*x + 450$ voor $x \leq 4500$.
c) Geef de recurrente betrekkingen voor $f_0(x)$ en $f_1(x)$
d) Bepaal m.b.v. achterwaartse recursie je optimale strategie, en geef deze in woorden weer. Hoeveel bedraagt je verwachte eindbedrag?

[redacted]

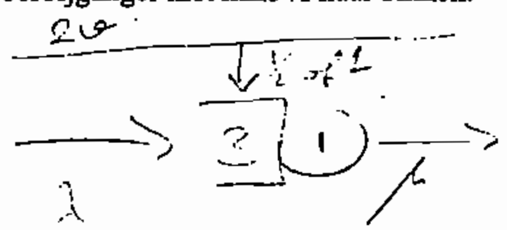
Opgave 2 (10 punten)
Een architect werkt samen met drie aannemers A, B en C die elkaars concurrenten zijn. Elke maand heeft hij één ontwerp uit te voeren en benadert daar één van de drie aannemers voor. Als een aannemer die benaderd wordt niet kan of niet wil, wordt het ontwerp voor die maand door de architect in eigen beheer uitgevoerd. De voorwaardelijke kansen dat de gevraagde aannemer het projectontwerp accepteert, gegeven de situatie in de voorafgaande maand, staan in de volgende tabel:

Toestand vorige maand	Kans op acceptatie deze maand door:		
	A	B	C
In eigen beheer	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
Met A gedaan	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Met B gedaan	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Met C gedaan	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

De architect wil het verdisconteerde aantal keren dat hij een project in eigen beheer moet uitvoeren over een oneindige horizon minimaliseren (kies als verdisconteringsfactor $\alpha = \frac{3}{4}$).

a) Dit probleem kan worden gedefinieerd als een Markov beslissingsprobleem. Definieer de toestanden i, de beslissingen d en de optimale waardefunctie V(i).
b) Bepaal de verwachte directe kosten r(i,d) en de overgangskansen p(j|i,d) voor iedere toestand i en beslissing d.
c) Geef de optimaliteitsvergelijkingen voor dit probleem.
d) Kies de volgende startpolitiek: benader aannemer A, B en C als dezelfde aannemer vorige maand de opdracht heeft uitgevoerd, benader A als de architect de opdracht vorige maand zelf heeft uitgevoerd. Gebruik politiek iteratie om te bepalen of deze politiek optimaal is.
e) Voer 2 stappen uit van het waarde iteratie algoritme uitgaande van $V_0(i) = 0$ voor alle i.

Opgave 3 (11 punten)
Beschouw een eindig wachtrijsysteem met drie wachtplaatsen en één loket. Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ. De bedieningsduren zijn negatief exponentieel verdeeld met gemiddelde $1/\mu$.
Wachtende klanten trekken aandacht van nieuwsgierige voorbijgangers. Daarmee genereren wachtende klanten een nieuwe aankomststroom. Nieuwsgierige voorbijgangers passeren het wachtrijsysteem met intensiteit 2ν. Indien er nog één vrije plaats is in het systeem is, dan gaan nieuwsgierige voorbijgangers altijd het wachtrijsysteem binnen. Indien er één wachtende klant in het systeem is, dan gaat een passerende nieuwsgierige voorbijganger met kans ½ naar binnen.



Indien het systeem vol is op het moment dat iemand arriveert gaat deze weg en komt nooit meer terug. (Dit geldt uiteraard voor beide aankomststromen.)
Met P_n duiden we de stationaire kans aan op n klanten in het systeem.

a) Geef het transitiediagram en de evenwichtsvergelijkingen.
b) Bepaal uit de evenwichtsvergelijkingen de stationaire kansen.

De antwoorden op de volgende vragen mogen gegeven worden in termen van P_n, λ, μ en ν.

c) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal wachtende klanten in het systeem.
d) Hoeveel personen gaan gemiddeld naar binnen per tijdseenheid?
e) Hoeveel klanten worden gemiddeld bediend per tijdseenheid?
f) Wat is de gemiddelde wachttijd van een willekeurige klant in het systeem?

Opgave 4 (7 punten)
Beschouw een bedrijf waarin T-shirts worden gemaakt en bedrukt. We bekijken de afdeling waarin eerst de afbeeldingen op de T-shirts worden gestreken en de T-shirts vervolgens worden verpakt. Deze twee handelingen worden steeds door één en dezelfde medewerker voor één T-shirt achtereenvolgens verricht. Er is één strijkapparaat en één inpakmachine en deze staan beiden in een aparte ruimte.
De duur van het strijken en verpakken is negatief exponentieel verdeeld met respectievelijk gemiddelde 6 minuten en 2 minuten. De loopafstand van de ene ruimte naar de andere is verwaarloosbaar.
De productie-afdeling van het bedrijf is zo ingericht dat de afdeling altijd T-shirts beschikbaar heeft om te bedrukken.
Er is echter wel een probleem op de afdeling. Het strijkapparaat is verouderd. Dit heeft tot gevolg dat de strijkhandeling met kans $p = ½$ moet worden overgedaan.
Er werken m medewerkers op de afdeling.

a) Modelleer de afdeling als een gesloten netwerk van wachtrijen.
b) Bepaal, gebruikmakend van het algoritme van Buzen, de kansverdeling van de medewerkers over de activiteiten (strijken en inpakken) indien er $m = 2$ medewerkers op de afdeling werken. Wat is de kans dat er niemand aan het strijken is?
c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* het gemiddelde aantal medewerkers en de gemiddelde verblijftijd in de strijk- en de inpakruimte, indien $m = 2$.

Opgave 2

a) toestanden i : uitvoering vorige woord. I, A, B, C. $\quad i = \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{I}$.

beslissing d : bewaakte ~~keuze voor~~ aanmelden A, B, C, ~~[illegible]~~) $d = \underset{1}{A}, \underset{2}{B}, \underset{3}{C}$

$$V(i) = \min \left\{ R(i,d) + \alpha \sum_{p(j|i,d)} V(j) \right.$$

$\alpha = 3/4$

b.) $R(i,d)$

V_I	V_B
$-R(I\mid A) = \cancel{1/2}\ 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$-R(B\mid A) = \cancel{1/4}\ 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$R(I\mid B) = \cancel{1/2}\ 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$R(B\mid B) = \cancel{2/3}\ 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
$R(I\mid C) = \cancel{3/4}\ 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$R(B\mid C) = \cancel{1/3}\ 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$-R(A\mid A) = \cancel{1/2}\ 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$R(C\mid A) = \cancel{3/5}\ 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
$R(A\mid B) = \cancel{1/3}\ 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$R(C\mid B) = \cancel{2/5}\ 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
$R(A\mid C) = \cancel{1/4}\ 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$R(C\mid C) = \cancel{1/5}\ 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
V_A	V_C

denk uit in kans dat je het zeg moet doen?

$p(A\mid I,A) = \frac{1}{2}$	$P(B\mid I,B) = \frac{1}{2}$	$P(C\mid I,B) = \frac{3}{4}$
$p(I\mid I,A) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$P(I\mid I,B) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$P(I\mid I,C) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

$P(A\mid A,A) = \frac{1}{2}$	$P(A\mid B,A) = \frac{1}{4}$	$P(A\mid C,A) = \frac{3}{5}$
$P(B\mid A,B) = \frac{1}{3}$	$P(B\mid B,B) = \frac{2}{3}$	$P(B\mid C,B) = \frac{2}{5}$
$P(C\mid A,C) = \frac{1}{4}$	$P(C\mid B,C) = \frac{1}{3}$	$P(C\mid C,C) = \frac{1}{5}$
$P(I\mid A,A) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$P(I\mid B,A) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$P(I\mid C,A) = \frac{2}{5}$
$P(I\mid A,B) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$P(I\mid B,B) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$P(I\mid C,B) = \frac{3}{5}$
$P(I\mid A,C) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$P(I\mid B,C) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$P(I\mid C,C) = \frac{4}{5}$

c) $V_A = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} V_A + \frac{1}{2} V_I\right) & [A] \\ \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} V_B + \frac{2}{3} V_I\right) & [B] \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} V_C + \frac{3}{4} V_I\right) & [C] \end{cases}$

$V_B = \max \begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} V_A + \frac{3}{4} V_I\right) & [A] \\ \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} V_B + \frac{1}{3} V_I\right) & [B] \\ \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} V_C + \frac{2}{3} V_I\right) & [C] \end{cases}$

$V_C = \max \begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5} V_A + \frac{2}{5} V_I\right) & [A] \\ \frac{3}{5} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5} V_B + \frac{3}{5} V_I\right) & [B] \\ \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5} V_C + \frac{4}{5} V_I\right) & [C] \end{cases}$

$V_I = \max \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} V_A + \frac{1}{2} V_I\right) & [A] \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} V_B + \frac{1}{2} V_I\right) & [B] \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} V_C + \frac{1}{4} V_I\right) & [C] \end{cases}$

d) $V_s = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{8} V_A + \frac{3}{8} V_I & [A] \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} V_B + \frac{1}{4} V_I & [B] \\ \frac{4}{5} + \frac{3}{20} V_C + \frac{3}{5} V_I & [C] \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} V_A + \frac{3}{8} V_I & [A] \end{cases}$

Dus $V_A = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} V_A + \frac{3}{8} V_I \Rightarrow \frac{5}{8} V_A = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} V_I \Rightarrow V_A = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} V_I$

$V_B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} V_B + \frac{1}{4} V_I \Rightarrow \frac{1}{2} V_B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} V_I \Rightarrow V_B = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} V_I$

$V_C = \frac{4}{5} + \frac{3}{20} V_C + \frac{3}{5} V_I \Rightarrow \frac{17}{20} V_C = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} V_I \Rightarrow V_C = \frac{16}{17} + \frac{12}{17} V_I$

$V_I = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} V_A + \frac{3}{8} V_I \Rightarrow \cancel{\frac{3}{8} V_I = \frac{5}{8} V_A - \frac{1}{2} \Rightarrow V_I = \frac{5}{3} V_A - \frac{4}{3}}$

$\cancel{V_A = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3} V_A - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow V_A = \frac{4}{5} \quad V_I = \frac{5}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} V_I\right) - \frac{4}{3}}$

$\cancel{V_I = \frac{4}{3} + V_I - \frac{4}{3} \Rightarrow V_I = 0, \; V_A = \frac{4}{5}, \; V_B = \frac{2}{3}, \; V_C = \frac{16}{17}.}$

$\frac{5}{8} V_I = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} V_A \Rightarrow V_I = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} V_A \Rightarrow V_I = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} V_I\right)$

$V_I = \frac{32}{25} + \frac{9}{25} V_I \Rightarrow 2$

a.) $V_I = 2 \rightarrow V_A = 2$, $V_B = 1\frac{2}{3}$ $V_C = \frac{40}{17}.$

$$V_A = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{3}{8}2 = 2 & [A]^* \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot 1\frac{2}{3} + \frac{1}{2}2 = \frac{25}{12} \approx 2{,}08 & [B] \\ \frac{3}{4} + \frac{2}{16}\cdot\frac{40}{17} + \frac{9}{16}\cdot 2 = \cancel{\frac{7}{4}}\ 315/136 \approx 2{,}3 & [C] \end{cases}$$

$$V_B = \begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\cdot 2 + \frac{9}{16}\cdot 2 = 2\frac{1}{4} & [A] \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1\frac{2}{3} & [B]^* \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{40}{17} + \frac{1}{2}2 = 115/51 & [C] \end{cases}$$

$$V_C = \begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{9}{20}\cdot 2 + \frac{3}{16}\cdot 2 = 1{,}9 & [A]^* \\ \frac{3}{5} + \frac{3}{10}\cdot 1\frac{2}{3} + \frac{9}{20}\cdot 2 = 2 & [B] \\ \frac{4}{5} + \frac{3}{20}\cdot\frac{40}{17} + \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{40}{17} & [C] \end{cases}$$

$$V_I = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{3}{8}\cdot 2 = 2 & [A] \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\cdot 2 = 1{,}875 & [B]^* \\ \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{40}{17} + \frac{3}{16}\cdot 2 = 265/136 & [C] \end{cases}$$

vorige waard A → kies A.
" " B → " B
" " C → kies A ← 1pv C → C
" " I → " B ← 1pv I → A.

e.) $V_1(A) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{1}{2}$ [A]

$V_1(B) = \min\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{3}$ [B]

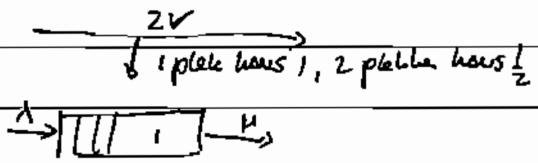
$V_1(C) = \min\left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{2}{5}$ [A]

$V_1(I) = \min\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$ [C]

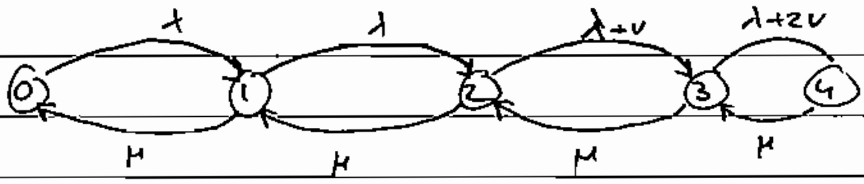
$$V_2(A) = \left.\begin{cases} \cancel{\frac{3}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4}} \; \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 7/8 \\ 3/4 + 3/16 \times \frac{2}{5} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{4} = 63/320 \end{cases}\right\} \frac{63}{320} \quad [C]^*$$

$$V_2(B) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \ldots \\ \frac{1}{3} + \ldots \\ \frac{2}{3} + \ldots \text{ etc.} \end{cases}$$

Opgave 3



a)



$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$\lambda P_1 + \mu P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$$
$$\lambda P_2 + \nu P_2 + \mu P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3$$
$$\lambda P_3 + 2\nu P_3 + \mu P_3 = (\lambda + 2\nu) P_2 + \mu P_4$$
$$\mu P_4 = (\lambda + 2\nu) P_3$$

$\lambda P_0 = \mu P_1 \qquad P_1 = \rho . P_0$

$\lambda P_1 + \mu P_1 = \lambda . \frac{\mu}{\lambda} P_1 + \mu P_2$

$\lambda P_1 + \cancel{\mu P_1} = \cancel{\mu P_1} + \mu P_2 \quad , \lambda P_1 = \mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu} . P_1$

etc.

$P_2 = \rho^2 P_0$

b. $P_0 = \frac{\mu}{\lambda} P_1$

$$\lambda P_1 + \mu P_1 = \lambda\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) P_1 + \mu P_2$$
$$\lambda P_1 = \mu P_2$$
$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1$$

$$\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1 + \nu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1 + \mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3$$
$$\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1 + \nu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1 + \lambda P_1 = \lambda P_1 + \mu P_3$$
$$\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1 + \nu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1 = \mu P_3$$
$$P_3 = \lambda^2 P_1 + \nu\lambda P_1$$

$$\mu P_4 = (\lambda + 2\nu)(\lambda^2 P_1 + \nu\lambda P_1)$$
$$\mu P_4 = \lambda^3 P_1 + \nu\lambda^2 P_1 + 2\nu\lambda^2 P_1 + 2\nu^2\lambda P_1$$
$$P_4 = \left(\frac{\lambda + 2\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda^2 P_1 + \nu\lambda P_1}{\mu}\right)$$

$$\frac{\mu}{\lambda}P_1 + P_1 + \frac{\lambda}{\mu}P_1 + \lambda^2 P_1 + v\lambda P_1 + \left(\frac{\lambda+2v}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda^2 P_1 + v\lambda P_1}{\mu}\right) = 1$$

$$\frac{\mu}{\lambda}P_1 + P_1 + \frac{\lambda}{\mu}P_1 + \lambda^2 P_1 + v\lambda P_1 + \frac{\lambda^3}{\mu}P_1 + \frac{v\lambda^2}{\mu}P_1 + \frac{2v\lambda^2}{\mu}P_1 + \frac{2v^2\lambda}{\mu}P_1 = 1$$

c) $\cancel{EW = \lambda EN_w}$ $\cancel{EW = EF - \frac{1}{\mu}}$

$\cancel{EN_w = \frac{EW}{\lambda}}$

$EN_w = \lambda \cdot EW$ $EW = EF - \frac{1}{\mu}$ leden $1.P_2 + 2.P_3 + 3.P_4$

$EN_w = \lambda \cdot \frac{P_1/\mu}{\frac{\mu(1-P_1)}{\mu}}$

$\lambda P_2 + 2(\lambda+v)P_3 + 3(\lambda+2v)P_4$

d) $\cancel{0.\lambda P_0 + 1.\lambda P_1 + 2\lambda P_2 + 3(\lambda+v)P_3 + 4.(\lambda+2v)P_4}$

$1-P_0 = \rho \Rightarrow 1-P_0 = \frac{\lambda}{\mu}$

$\underbrace{(1-P_4)}_{\text{kans dat niemand maar binnen gaat}}\underbrace{(\lambda+2v)}_{\text{totale aankomstintensiteit } P_4}$

$= 1 -$ kans systeem vol.

e) $\cancel{EF - \frac{1}{\lambda}}$ $\frac{1}{\mu}(1-P_0)$ $1-P_0$ [illegible]

2 ? = kans dat klant in systeem zit

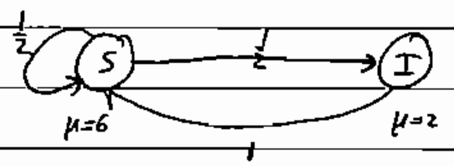
f) $\cancel{EW = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = EF - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{\mu}}$

$$\frac{P_2 + 2P_3 + 3P_4}{\mu}$$

$\boxed{\text{manier} \Rightarrow E(W) = \frac{E(L)}{\lambda(1-P_{k+1})}}$

Opgave 4

a.)



$$\left.\begin{array}{l}\pi_S = \pi_I + \frac{1}{2}\pi_S \\ \pi_I = \frac{1}{2}\pi_S\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\cancel{\pi_S = 1} \\ \pi_I = \frac{1}{2}\end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l}\pi_S = 2\pi_I \\ \pi_I = \frac{1}{2}\pi_S\end{array}\right\} \pi_S = 2\left(\frac{1}{2}\pi_S\right) \Rightarrow \pi_S = \pi_S$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\pi_S + \pi_S = 1 \\ 1\frac{1}{2}\pi_S = 1\end{array}\right\} \pi_S = \frac{2}{3}, \quad \pi_I = \frac{1}{3}$$

b.) Buren $m=2$ $\qquad \rho_S = \frac{2}{3}/6 = \frac{1}{9} \quad \rho_I = \frac{1}{3}/2 = \frac{1}{6}$

$\cancel{C_i(0) = 0}$ $\quad C_i(0) = \rho_i^0$

$C_S(0) = \rho_S^0 = 1 \qquad C_I(0) = \rho_I^0 = 1$

$C_S(1) = \rho_S^1 = \frac{1}{9}$

$C_I(1) = \rho_I^1 = \frac{1}{6}$

$i = 1,2 \quad (1 = S, \; 2 = I)$

$k = 1,2 \quad \# \; m=2$

$C_i(0) = \rho_i^0 \Rightarrow C_1(0) = \rho_1^0 = 1 \qquad C_2(0)$

$C_1(1) = \frac{1}{9}^1 = \frac{1}{9} \qquad \cancel{C_2(1) = \frac{1}{6}^1} \qquad C_2(1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6}^1 \cdot \frac{1}{6}^0 = \frac{5}{18}$

$C_1(2) = \frac{1}{9}^2 = \frac{1}{81} \qquad \cancel{C_2(2) = \frac{1}{6}^2 = \frac{1}{36}} \qquad C_2(2) = \frac{1}{81} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{18} = \frac{19}{324} = C_m^{-1}$

$$P(0,2) = \frac{1}{\frac{19}{324}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{19}$$

(4)

c) $m=2$

$F_1(i) = \frac{1}{\mu_i}$ $\quad$ $\cancel{\mu_1 = 6 \quad \mu_2 = 2}$ $\quad$ $\mu_1 = \frac{1}{6}$ $\quad$ $\mu_2 = \frac{1}{2}$

$F_1(1) = 6 \qquad F_1(2) = 2$

$L_1(i) = \lambda_1 \sum \pi_i F_1(i)$

$= \lambda_1 \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \times 2 \right) \Rightarrow \lambda_1 \frac{14}{3} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{14}$

$\lambda_1(1) = \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \qquad L_1(1) = \frac{1}{7} \cdot 6 = \frac{6}{7}$

$\lambda_1(2) = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}. \qquad L_1(2) = \frac{1}{14} \cdot 2 = \frac{1}{7}$

$F_2(2) = \left(1 + \frac{6}{7}\right) \cdot / 6 = \frac{78}{7} \qquad F_1(2) = \left(1 + \frac{1}{7}\right) / \frac{1}{2} = \frac{16}{7}$

$L_2(i) = \lambda_2 \cdot \sum \pi_i F_2(i)$ $\qquad \lambda_2(1) = \frac{21}{86} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{43}$

$\Rightarrow \lambda_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{78}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{7} \right) = 2$

$\lambda_2 = 21/86$ $\qquad \lambda_2(2) = \frac{21}{86} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{86}$

$L_2(1) = 21/86 \cdot \frac{78}{7} \cdot \frac{7}{86} = 117/43$

$L_2(2) = 21/86 \cdot \frac{16}{7} = 24/43$

$\cancel{L_2(1) = \frac{21}{86} \cdot \frac{7}{43} =}$

$\cancel{L_2(2) = \frac{21}{86} \cdot \frac{7}{86} =}$

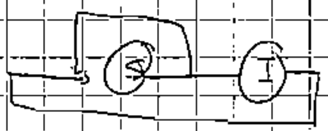
$L_2(1) = \frac{78}{7} \times \frac{7}{43} = \frac{78}{43}$

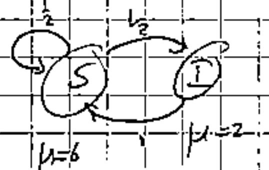
$L_2(2) = \frac{16}{7} \times \frac{7}{86} = \frac{16}{86} = \frac{8}{43}.$

+

2.

(4)





(4)

a)

$$\left.\begin{array}{l}\pi_S = \pi_I + \frac{1}{2}\pi_S \\ \pi_I = \frac{1}{2}\pi_S\end{array}\right\} \quad \pi_S = \frac{1}{2}\pi_S + \frac{1}{2}\pi_S \rightarrow \pi_S = \pi_S$$

$$\frac{1}{2}\pi_S + \pi_S = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} \Rightarrow \pi_I = \frac{1}{3}$$

b) $m = 2$ Buzen.

• NA eerenvoudig in a) $\rho_S = \frac{2/3}{6} = \frac{1}{9}$ $\rho_I = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}$.

$C_i(k) = C_{i-1}(k) + \rho_i \cdot C_i(k-1)$, $i = 1,2$ (1 = single, 2 = infinite)
(k = 1 (medium 1) 2 (medium 2))

$$C_I(0) = \rho_I^0 = 1 \qquad \left[\begin{array}{l} C_2(0) = \rho_2^0 = 1 \\ C_2(1) = \frac{1}{6}^1 = \frac{1}{6} \\ C_2(2) = \frac{1}{6}^2 = \end{array}\right] \Rightarrow \text{Nee} \; \nabla \; \text{eerst } C_I$$

$$C_I(1) = \rho_I^1 = \frac{1}{9}$$

$$C_I(2) = \rho_I^2 = \frac{1}{81}$$

$$C_2(0) = \cancel{C_1(0) + \rho_2 C_2} = \rho_2^0 = 1$$

$$C_2(1) = C_1(1) + \rho_2 \cdot C_2(0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{5}{18}$$

$$C_2(2) = \frac{1}{81} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{18} = \frac{19}{324} \quad (= C_n^{-1})$$

$$P(0,2) = \frac{1}{\frac{19}{324}} \cdot \rho_1^0 \cdot \rho_2^2 = \frac{324}{19} \cdot \frac{1}{9}^0 \cdot \frac{1}{6}^2 \approx 0{,}47368 = \frac{9}{19}$$

(4)

c.) $F_m(j) = \dfrac{1 + L_{m-1}(j)}{\mu_j}$ eerst $F_1(j) \to \dfrac{1}{\mu_j}$, $L_m(j) = \lambda_m(j)\, F_m(j)$

$= \lambda_m \sum \pi_j F_m(j)$

$F_1(1) = \dfrac{1}{1/6} = 6 \qquad F_1(2) = \dfrac{1}{1/2} = 2$

$\mu_1 = \dfrac{1}{6}$

$\mu_2 = \dfrac{1}{2}$

$L_1(j) = \lambda_1(j)\, F_1(j)$

$= \lambda_1\left(\dfrac{2}{3}\cdot 6 + \dfrac{1}{3}\cdot 2\right) \Rightarrow \lambda_1 \dfrac{14}{3} = 1, \quad \lambda_1 = \dfrac{3}{14}$

$\lambda_1(1) = \dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{7} \qquad L_1(1) = \lambda_1(1)\,\pi_1 = 1/7 \cdot 6 = 6/7$

$\lambda_1(2) = \dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{1}{3} = 1/14 \qquad L_1(2) = \lambda_1(2)\,\pi_2 = 1/14 \cdot 2 = 1/7$

~~$L_1(1) = 6/7 \cdot 6 = \dfrac{36}{7}$ 3/14.~~

~~$L_2(2) = 1/7 \cdot 2 = 2/7$ 3/14.~~

$F_2(1) = \dfrac{1 + 6/7}{1/6} = \dfrac{78}{7} \qquad F_2(2) = \dfrac{1 + 1/7}{1/2} = \dfrac{16}{7}.$

~~$\lambda_2 \left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{78}{7} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{16}{7}\right) = 2 \quad \lambda_2 = \dfrac{3}{7}$~~

~~$\lambda_2(1) = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{7} \qquad L_2(1) = \dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{78}{7} = \dfrac{156}{49}$~~

~~$\lambda_2(2) = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{7} \qquad L_2(2) = \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{16}{7} = \dfrac{16}{49}$~~

$\lambda_2\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{78}{7} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{16}{7}\right) = 2 \qquad \lambda_2 = \dfrac{21}{86}$

$\lambda_2(1) = \dfrac{21}{86}\cdot\dfrac{2}{3} = 7/43 \qquad L_2(1) = 7/43 \cdot 78/7 = \dfrac{78}{43}$

$\lambda_2(2) = \dfrac{21}{86}\cdot\dfrac{1}{3} = 7/86 \qquad L_2(2) = 7/86 \cdot 7/86 = \dfrac{8/43}{2}$

Gemiddeld # medewerkers

$S \to 78/43$

$I \to 8/43$

Gemiddelde verblijftijd

$S \to 78/7$

$I \to 16/7.$

5

Kenmerk: EWI08/TW/SOR/RB/02
Datum: 19 June 2008

RB

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Maandag 23 juni, 13:30 – 16:30 uur 2008.

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Eindcijfer = (aantal behaalde punten+10)/10. Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

Opgave 1 (20 punten)
Een machine bevindt zich aan het begin van iedere week in één van twee mogelijke toestanden: hetzij werkend, hetzij kapot. Indien de machine gedurende een week werkt geeft dit een opbrengst 150. Gaat de machine in een bepaalde week kapot dan is de opbrengst in die week slechts 50. Indien de machine aan het begin van de week werkt kan men al of niet onderhoud plegen. Pleegt men onderhoud dan is de kans dat de machine die week kapot gaat 0.4; zonder onderhoud is deze kans 0.7 (beide kansen zijn onafhankelijk van het verleden van de machine). De onderhoudskosten bedragen 25. Indien de machine defect is (aan het begin van de week), kan men kiezen uit twee opties: hetzij vervangen door een nieuwe machine of repareren. Gemakshalve veronderstellen we dat geen van beide acties tijd vergt. Reparatie kost 50. De kans dat een net gerepareerde machine in die week kapot gaat is ook 0.4. Vervanging kost 125. Een nieuwe machine gaat de eerste week nooit kapot.

Gezocht wordt een politiek welke de verwachte winst (opbrengst - kosten) maximaliseert over een periode van 4 weken, indien de eerste week start met een werkende machine.

a. Definieer de toestanden, de fasen en de beslissingen in de mogelijke toestanden. Bepaal voor iedere toestand de verwachte directe winst in de week en de overgangskansen, beide afhankelijk van de gekozen beslissing.
b. Geef de D.P. recursies om dit probleem op te lossen.
c. Los het probleem op. Hoe groot is de optimale verwachte winst over de 4 weken? Hoe ziet de optimale politiek eruit?

5

→ voor uitwerking zie 2006 en 2004

Opgave 2 (25 punten)
Iedere dag bezit u 0 of 1 aandeel van een fonds. De dagprijs van dit aandeel is een stochastisch proces dat gemodelleerd wordt door een Markov keten met overgangskansen zoals in de tabel:

		dag $n+1$	
		100	200
dag n	100	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	200	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Aan het begin van een dag waarop u een aandeel bezit kunt u kiezen tussen: verkopen tegen de geldende dagprijs of behouden. Als u aan het begin van een dag geen aandeel bezit, kunt u kiezen tussen het kopen van een aandeel tegen de geldende prijs of niet kopen.

Uw doel is de verwachte contante waarde van de winst te maximaliseren over een oneindige horizon, bij een verdisconteringsfactor (op dagbasis) van 0.8.

a. Definieer de toestanden en geef per toestand de mogelijke beslissingen.
b. Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen.
c. Voer twee iteraties uit van het Waarde-iteratie algoritme.
d. Formuleer een L.P.-model waarmee dit probleem opgelost kan worden. Beschrijf hoe in principe uit de oplossing van dit L.P.-model de optimale politiek gevonden wordt.
e. Kies zelf een stationaire politiek en onderzoek m.b.v. het Politiek-iteratie algoritme of de door u gekozen politiek optimaal is.
f. Hoeveel stationaire politieken zijn er? (Verklaar uw antwoord door gebruik te maken van de definitie van een stationaire politiek).

<u>Opgave 3</u> (25 punten)

Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ bij een wachtsysteem met 2 wachtplaatsen en één server. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu$. Als de server werkt is deze onderhevig aan stochastische uitval volgens een Poissonproces met intensiteit ϑ. Als de server uitvalt, wordt deze onmiddellijk gerepareerd. De reparatieduren zijn exponentieel verdeeld met gemiddelde $1/K$. Na reparatie functioneert de server weer als "nieuw" en begint opnieuw (van voren af aan) met de bediening die op moment van uitval onderhanden was. Een klant die het systeem vol aantreft gaat verloren.

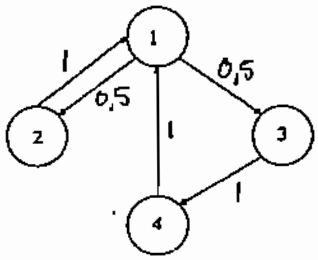
Alle onderliggende stochastische variabelen zijn onderling onafhankelijk.

a. Beschrijf het toestandsproces met zijn toestanden [bedenk dat zowel het aantal klanten in het systeem als de toestand van de server in de toestandsbeschrijving opgenomen moeten worden] d.m.v. een overgangsintensiteitendiagram.
b. Geef de balansvergelijkingen en los ze op.

De antwoorden op de volgende vragen moeten uitgedrukt worden in de gegeven parameters en toestandskansen.

c. Hoe groot zijn de binnenkomst- en vertrekintensiteit?
d. Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten in het systeem.
e. Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server bezig is met bedienen?
f. Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server in reparatie is?
g. Wat is de verdeling van de tijd gedurende welke het systeem ononderbroken leeg is? $1-e^{-\lambda t}$

<u>Opgave 4</u> (20 punten)
Beschouw de onderstaande Markov keten.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

De overgangskansen van toestand i naar toestand j worden gegeven in de matrix.

a. Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markov keten.
b. Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 4 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden. Neem aan dat er m klanten in het systeem aanwezig zijn. Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende klanten. De gemiddelde bedieningsduur in de verschillende stations bedraagt resp. $1/\Omega_1 = 5/4$, $1/\Omega_2 = 5/4$, $1/\Omega_3 = 5$ en $1/\Omega_4 = 5/4$.

c. Bepaal m.b.v. *mean value analysis* het verwachte aantal klanten en de gemiddelde verblijftijd bij de 4 stations voor m = 1 en m = 2.
d. Bepaal voor m = 2 m.b.v. het algoritme van Buzen de kans dat er $(n_1,\ldots,n_4)$ klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations.
a. Wat is de bezettingsgraad van station 2?

Uitw 23-juni-2008

(5)

Opgave 1

Formule → DP $f_n(i) = \max \{ r(i,a) + \sum_j p(j|i,a) f_{n+1}(j) \}$.

werkend [W] → onderhoud [O]; geen onderhoud [GO]

kapot [K] → vervangen [V]; reparatie [R]

kapot	werkend	
0,4	0,6	[O]
0,7	0,3	[GO]
0,4	0,6	[R]
0	1	[V]

a.) toestand i = kapot of werkend.
fasen n = weken met n = 1,2,3,4.
beslissing d = onderhoud / geen onderhoud of repareren / vervangen.

$[W,O] = (0{,}6 \times 150 + 0{,}4 \times 50) - 25 = 85$
$[W,GO] = (0{,}3 \times 150 + 0{,}7 \times 50) = 80$
$[K,R] = (0{,}4 \times 50 + 0{,}6 \times 150) - 50 = 60$
$[K,V] = (0 \times 50 + 1 \times 150) - 125 = 25$

Kansen.
$P(W|W,O) = 0{,}6$ $\quad P(W|K,R) = 0{,}6$
$P(K|W,O) = 0{,}4$ $\quad P(K|K,R) = 0{,}4$
$P(W|W,GO) = 0{,}3$ $\quad P(W|K,V) = 1{,}0$
$P(K|W,GO) = 0{,}7$ $\quad P(K|K,V) = 0.$

b) D.P recursies.

$$[W] \to f_j[W] = \max \begin{cases} 85 + 0{,}6 f_{j+1}(W) + 0{,}4 f_{j+1}(K) & [OND] \\ 80 + 0{,}3 f_{j+1}(W) + 0{,}7 f_{j+1}(K) & [GO] \end{cases}$$

$$[K] \to f_j(K) = \max \begin{cases} 60 + 0{,}6 f_{j+1}(W) + 0{,}4 f_{j+1}(K) & [R] \\ 25 + f_{j+1}(W) & [V] \end{cases}$$

c) $f_4(w) = \begin{cases} 85^* & [0] \\ 80 & [60] \end{cases}$

$f_4(k) = \begin{cases} 60^* & [R] \\ 25 & [V] \end{cases}$

$f_3(w) = \begin{cases} 85 + \{0{,}6\, f_4(w,R) + 0{,}4\, f_4(k,R) & = 85 + 0{,}6 \times 85 + 0{,}4 \times 60 = 160 \quad [0]^* \\ 80 + \{0{,}3\, f_4(w,60) + 0{,}7\, f_4(k,60) & = 80 + 0{,}3 \times 85 + 0{,}7 \times 60 = 147{,}5 \quad [60]^* \end{cases}$

$f_3(k) = \begin{cases} 60 + \{0{,}6 \cdot f_4(w,R) + 0{,}4\, f_4(k,R) & = 60 + 85 \times 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 60 = 135. \quad [R]^* \leftarrow \\ 25 + \{1{,}0\, f_4(w,R) & = 25 + 1 \times 85 = 110. \quad [V] \end{cases}$

$f_2(w) = \begin{cases} 85 + \{0{,}6 \cdot 160 + 0{,}4\, 135\} = 235^* & [0] \leftarrow \\ 80 + \{0{,}3 \cdot 160 + 0{,}7 \cdot 135\} = 222{,}5 & [60] \end{cases}$

$f_2(k) = \begin{cases} 60 + \{0{,}6 \cdot 160 + 0{,}4 \cdot 135\} = 210^* & [R] \\ 25 + \{1{,}0 \cdot 160) = 185 & [V] \end{cases}$

$f_1(w) = \begin{cases} 85 + \{0{,}6 \cdot 235 + 0{,}4 \cdot 210\} = 310^* & [0] \leftarrow \\ 80 + \{0{,}3 \times 235 + 0{,}7 \cdot 210\} = 297{,}5 & [60] \end{cases}$

$f_1(k) = \begin{cases} 60 + \{0{,}6 \times 235 + 0{,}4 \times 210\} = 285^* & [R] \\ 25 + (1{,}0 \cdot 235) = 260 & [V] \end{cases}$

Optimale verwachte winst over een 4 weken is $f_1(w) = \underline{310}$

Begint met werkende machine → (~~onderhoud~~ → ~~repareren~~ onderhouden → onderhouden.)

↓

dan onderhoud.

Begint met kapotte machine

↓

dan repareren.

(A) + (B)

(5)

* fase dag $n = 1, 2, 3 \ldots$
* toestand i aandeel in bezit $i=0$ wel in bezit
$i=1$ niet ,,
* Beslissing.

$i = 1 \begin{cases} \text{verkopen [V]} \\ \text{behouden [B]} \end{cases}$ $i = 0 \begin{cases} \text{kopen [K]} \\ \text{niet kopen [NK]} \end{cases}$

* Optimale waarde functie $V(i) = \max_{d \in D_n(i)} \left\{ R(i,d) + \alpha \sum_{j \in S} p(j|i,d) V(j) \right\}$ $i \in S$
* Directe opbrengsten.

[V] $R(1,100) = 100$ [K] $R(0,100) = -100$
$R(1,200) = 200$ $R(0,200) = -200$

[B] $R(1,100) = 0$ [NK] $R(0,100) = 0$
$R(1,200) = 0$ $R(0,200) = 0$

$$V(1,100) = \max \begin{cases} 100 + 0{,}8\{0{,}5\, V(0,100) + 0{,}5\, V(0,200)\} & [V] \\ 0 + 0{,}8\{0{,}5\, V(1,100) + 0{,}5\, V(1,200)\} & [B] \end{cases}$$

$$V(1,200) = \max \begin{cases} 200 + 0{,}8\{0{,}25\, V(0,200) + 0{,}75\, V(0,200)\} & [V] \\ 0 + 0{,}8\{0{,}25\, V(\phi,100) + 0{,}75\, V(\phi,200)\} & [B] \end{cases}$$

$$V(0,100) = \max \begin{cases} -100 + 0{,}8\{0{,}5\, V(1,100) + 0{,}5\, V(1,200)\} & [K] \\ 0 + 0{,}8\{0{,}5\, V(0,100) + 0{,}5\, V(0,200)\} & [NK] \end{cases}$$

$$V(0,200) = \max \begin{cases} -200 + 0{,}8\{0{,}25\, V(1,100) + 0{,}75\, V(1,200)\} & [K] \\ 0 + 0{,}8\{0{,}25\, V(0,100) + 0{,}75\, V(0,200)\} & [NK] \end{cases}$$

(c) $n = 1$ $V(i) = \max_{d \in D_n(i)} \{ R(i,d) \}$

$V_0(i,p) = 0 \quad \forall\, p, i$ (stellen)

$V_1(0,100) = 0$

$V_1(1,100) = 100$

$V_1(0,200) = 0$

$V_1(1,200) = 200$

$$V_2(0,100) = \max \begin{cases} -100 + 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 200 = 20^* & [K] \\ 0 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_2(1,100) = \begin{cases} 100 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}4\, 0 = 100 \\ 0 + 0{,}4\, 100 + 0{,}4\, 200 = 120^* & [B] \end{cases}$$

$$V_2(0,200) = \begin{cases} -200 + 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}6 \cdot 200 = -60 \\ 0 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0 = 0^* & [NK] \end{cases}$$

$$V_2(1,200) = \begin{cases} 200 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0 = 200^* & [V] \\ 0 + 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}6\, 200 = 140 \end{cases}$$

(1,200) → verkopen
$\delta(1) = 1$ 200

(0,200) → niet kopen
$\delta(0) = 0$ 0

(1,100) → behouden
$\delta(1) = 0$ 120

(0,100) → $\delta(0) = 1$ → kopen

(5)

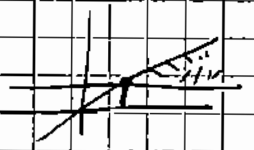
i) $\min \sum_i x_i$ gebruik stationaire politiek uit (c)

$x_1 = V(0,100)$
$x_2 = V(1,100)$
$x_3 = V(0,200)$
$x_4 = V(1,200)$

z.d.d.

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq -100 + 0{,}8(0{,}5\,x_2 + 0{,}5\,x_4) \\
x_1 &\geq 0 + 0{,}8(0{,}5\,x_1 + 0{,}5\,x_3) \\
x_2 &\geq 100 + 0{,}8(0{,}5\,x_1 + 0{,}5\,x_3) \\
x_2 &\geq 0 + 0{,}8(0{,}5\,x_4 + 0{,}5\,x_2) \\
x_3 &\geq -200 + 0{,}8(0{,}75\,x_4 + 0{,}25\,x_2) \\
x_3 &\geq 0 + 0{,}8(0{,}75\,x_3 + 0{,}25\,x_1) \\
x_4 &\geq 200 + 0{,}8(0{,}25\,x_1 + 0{,}75\,x_3) \\
x_4 &\geq 0 + 0{,}8(0{,}25\,x_4 + 0{,}75\,x_4)
\end{aligned}
$$

lijnen beschrijven waar optimale punt ligt (oplossing)



etc.

j) Politiek uit c/d.

① $V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{5} V_\pi(1,100) + \frac{2}{5} V_\pi(1,200)$
② $V_\pi(1,100) = \frac{2}{5} V_\pi(1,200) + \frac{2}{5} V_\pi(1,100)$
③ $V_\pi(0,200) = \frac{3}{5} V_\pi(0,200) + \frac{1}{5} V_\pi(0,100)$
④ $V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{5} V_\pi(0,100) + \frac{3}{5} V_\pi(0,200)$

② $\frac{3}{5} V_\pi(1,100) = \frac{2}{5} V_\pi(1,200) \Rightarrow \underline{V_\pi(1,100) = \frac{2}{3} V_\pi(1,200)}$

① $V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3} V_\pi(1,200)\right) + \frac{2}{5} V_\pi(1,200)$

$= -100 + \frac{4}{15} V_\pi(1,200) + \frac{2}{5} V_\pi(1,200)$

$\underline{V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{3} V_\pi(1,200)}$

③ $\frac{2}{5} V_\pi(0,200) = \frac{1}{5} V_\pi(0,100) \Rightarrow \underline{V_\pi(0,200) = \frac{1}{2} V_\pi(0,100)}$

④ $V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{5} V_\pi(0,100) + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2} V_\pi(0,100)\right)$

$\underline{V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{2} V_\pi(0,100)}$

$V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{2}\left(-100 + \frac{2}{3} V_\pi(1,200)\right)$
$V_\pi(1,200) = 200 + -50 + \frac{V_\pi(1,200)}{3}$
$\frac{2}{3} V_\pi(1,200) = 150$
$V_\pi(1,200) = 225$
$V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{3} \cdot 225 = 50$

$V_\pi(1,100) = \frac{2}{3} \cdot 225 = 150$

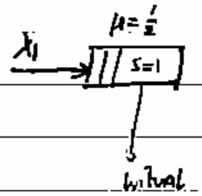
$V_\pi\left(\frac{1}{2}\left(-100 + \frac{2}{3} \cdot 225\right)\right) = 25$

(0,200)

Opgave 3

Zie opg 3 aug 2004

Systeem M/M/1/2.

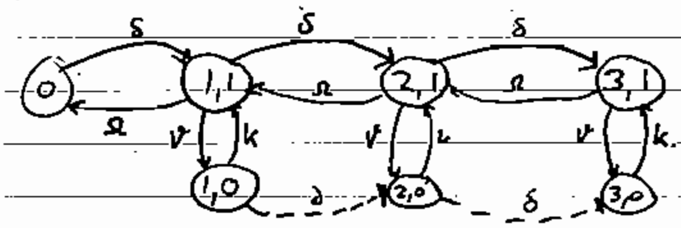


- plaats voor max 3 klanten (2 in wachtruimte, 1 in behandeling)

toestand i,j met i = # klanten

j = werkt 1, kapot 0.

$\delta = \nu$



?: Nee → eenstwerden voor 1e van 2,0 naar 3,0 kan.

b.)

$\delta P_0 = \Omega P_{11}$ $\overset{1^e}{\Rightarrow}$ $P_{11} = \frac{\delta}{\Omega} P_0$

$(\nu+\delta+\Omega)P_{11} = \delta P_0 + k P_{10} + \Omega P_{21}$ $\overset{3^e}{\Rightarrow}$ $P_{21} = \delta^2 P_0$

$\nu P_{11} + \delta P_{11} + \Omega P_{11} = \delta P_0 + k \frac{\nu}{k}\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0 + \Omega P_{21}$

$\cancel{\nu\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0} + \delta\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0 + \cancel{\delta P_0} = \cancel{\delta P_0} + \cancel{\nu\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0} + \Omega P_{21}$

$\delta\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0 = \Omega P_{21}$

$k P_{10} = \nu P_{11}$ $\overset{2^e}{\Rightarrow}$ $P_{10} = \frac{\nu}{k}\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0$

$(\nu+\delta+\Omega)P_{21} = \delta P_{11} + k P_{20} + \Omega P_{31}$ $\Rightarrow$ $P_{31} = \delta^3 P_0 + \delta^2 P_0$

$(\cancel{\nu}+\delta+\Omega)\delta^2 P_0 = \frac{1}{\Omega}\delta^2 P_0 + \cancel{\nu\delta^2 P_0} + \Omega P_{31}$

$(\delta+\cancel{\Omega})\delta^2 P_0 = \frac{1}{\cancel{\Omega}}\delta^2 P_0 + \cancel{\Omega} P_{31}$

$k P_{20} = \nu P_{21}$ $\Rightarrow$ $P_{20} = \frac{\nu}{k} P_{21}$ $\Rightarrow$ $P_{20} = \frac{\nu}{k}\delta^2 P_0$

$(\nu+\Omega)P_{31} = \delta P_{21} + k P_{30}$ $\Rightarrow$ $P_{30} = \frac{(\nu+\Omega)\delta^3 P_0 + \delta^2 P_0 - \delta^3 P_0}{k}$

$$P_0 + P_{11} + P_{10} + P_{21} + P_{20} + P_{31} + P_{30} = 1$$

$$P_0 + \left(\frac{\delta}{\Omega}P_0\right) + \left(\left(\frac{\nu}{k}\right)\left(\frac{\delta}{\Omega}\right)P_0\right) + \left(\delta^2 P_0\right) + \left(\frac{\nu}{k}\delta^2 P_0\right) + \left(\delta^3 P_0 + \delta^2 P_0\right) + \left(\frac{(\nu+\Omega)\delta^3 P_0 + \delta^2 P_0 - \delta^3 P_0}{k}\right) = 1$$

c.) binnenkomst : δ → $\delta P_0 + \delta(P_{10} + P_{11}) + \delta(P_{20} + P_{21})$

verwerkintensiteit : Ω → $\Omega(P_{11} + P_{21} + P_{31})$ $\Big\}$ $\delta = \Omega$

d.) $E(L) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{n=0}^{3} n P_{ni}$ $\Rightarrow$ $E(L) = \sum_{i=0}^{1} 0 P_0 + 1 P_{1i} + 2 P_{2i} + 3 P_{3i}$

e) $P_{11} + P_{21} + P_{31}$

f.) $P_{10} + P_{20} + P_{30}$

g.) $1 - e^{-\delta t}$?! of $\cancel{1}$? ⇒ Met ononderbroken leg $e^{-\delta t}$.

onoverdekte reparatie $e^{-\delta t}$

ExxonMobil

Opgave 4

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_1 = P_4 + P_2 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_1$

$P_2 = \frac{1}{2}P_1$

$P_3 = \frac{1}{2}P_1$

$P_4 = P_3 = 1/2\, P_1$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

$P_1 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_1 \Rightarrow 2\frac{1}{2}P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{4}{10}$

$P_1 = 4/10$; $P_1 = 2/10$; $P_3 = 2/10$; $P_4 = 2/10$ $\quad \pi = \{\frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}\}$

b, ? Mean first passage time $m_{14} = 1 + \sum_{k \neq 4} p_{1k} m_{k4} \Rightarrow \left[\cancel{m_{14} = 1 + p_{12} m_{21} + p_{13} \cdot m_{34}} \quad \cancel{m_{14} = 1 + \frac{1}{2} \cdot m_{21} + \frac{1}{2} \cdot m_{34}} \right]$ $M_{14} = M_{13} + M_{34}$

$M_{14} = 1 + \sum_{j \neq 4} p_{1k} m_{k4} \Rightarrow M_{14} = \cancel{1 + p_{13}} M_{13} + M_{34}$

$M_{13} = 1 + p_{12} M_{13} + p_{13} M_{34} \Rightarrow \cancel{\quad} \Rightarrow M_{13} = 2$

$M_{34} = 1$ dus $M_{14} = 2 + 1 = 3$? $\Rightarrow \cancel{M_{14} = 1 + p_{12} M_{24} + p_{13} M_{34}}$

c) $m = 1$ $\quad F_1(j) = \frac{1}{\mu_j}$ $\quad \mu_1 = \frac{4}{5}$; $\mu_2 = \frac{4}{5}$; $\mu_3 = 5$; $\mu_4 = \frac{4}{5}$ $\quad \cancel{M_{24} = 1 + p_{21} M_{14}}$

μ_3: $1/5$

cola example.

$F_1(1) = \frac{5}{4}$ $\quad F_1(2) = \frac{5}{4}$ $\quad F_1(3) = \frac{1}{5}$ $\quad F_1(4) = \frac{5}{4}$

$\sum L_1(j) = \lambda_1 \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{4} \right) \Rightarrow \lambda_1 \frac{26}{25}$ $\quad \lambda_1 = \frac{25}{26} =$

$\lambda_1(j) = \lambda_1 \cdot \pi_i$ $\quad \cdot \frac{5}{4}$

$\lambda_1(1) = \frac{25}{26} \cdot 4/10 = 5/13$ $\quad L_1(1) = \lambda_1(1) \cdot F_1(1) = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{52}$

$\lambda_1(2) = 25/26 \cdot 2/10 = 5/26$ $\quad L_1(2) = \lambda_1(2) \cdot F_1(2) = 5/26 \cdot 5/4 = 25/104$

$\lambda_1(3) = 25/26 \cdot 2/10 = 5/26$ $\quad L_1(3) = \lambda_1(3) \cdot F_1(3) = 5/26 \cdot 1/5 = 1/26$

$\lambda_1(4) = 25/26 \cdot 2/10 = 5/26$ $\quad L_1(4) = \lambda_1(4) \cdot F_1(4) = 5/26 \cdot 5/4 = 25/104$

$m = 2$ $\quad F_2(j) = (1 + L_1(j))/\mu_j$ $\quad \sum L_2(j) = \lambda_2 \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{385}{208} + \frac{2}{10} \cdot \frac{645}{416} + \frac{2}{10} \cdot \frac{27}{130} + \frac{2}{10} \cdot \frac{645}{416} \right)$

$\lambda_2 \cdot \frac{1}{338} \Rightarrow \lambda_2 = 338.$

$F_2(1) = \left(1 + \frac{25}{52}\right)/4/5 = 385/208$

$F_2(2) = (1 + 25/104)/4/5 = 645/416$ $\quad L_2(1) = 135,2 \cdot \left(\frac{385}{208}\right) = 250,25$

$F_2(3) = (1 + 1/26)/5 = 27/130$ $\quad L_2(2) = 67,6 \cdot (645/416) = 104,8$

$F_2(4) = (1 + 25/104)/4/5 = 645/416$ $\quad L_2(3) = 67,6 \cdot (27/130) = 14,04$

$L_2(4) = 67,6 \cdot (645/416) = 104,8.$

$\lambda_2(1) = 338 \cdot 4/10 = 135,2$

$\lambda_2(2) = 338 \cdot 2/10 = 67,6$

$\lambda_2(3) = 338 \cdot 2/10 = 67,6$

$\lambda_2(4) = 338 \cdot 2/10 = 67,6$

d) $\rho_1 = \frac{4/10}{4/5} = \frac{1}{2}$ $\rho_2 = \frac{3/10}{4/5} = \frac{1}{4}$ $\rho_3 = \frac{2/10}{1/5} = \cancel{1/25}$ $= 1$ $\rho_4 = \frac{2/10}{4/5} = \frac{1}{4}$

Voor kans $P(n_1, n_2, n_3, n_4)$ dat er n_i klanten aanwezig zijn bij station i (met totaal $m=2$ klanten) moet je weten $C_2^{-1}(2)$

$C_1(1) = \rho_1 = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}^1$

$C_1(2) = \rho_2 = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}^2$

$C_1(3) = \rho_3 = \cancel{1/25}\ \frac{1}{2}^3$ $\cancel{1/8}$ $= \frac{1}{8}$

$C_1(4) = \rho_4 = 1/4$ $\frac{1}{4}^4$

$C_2(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}^0 = \frac{3}{4}$

$C_2(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}^1 = \cancel{\frac{9}{16}}\ 7/16$

$C_2(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{7}{16} = \cancel{141/1600}\ 15/64$

$C_2(4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times 141/400\ \frac{15}{64} = \cancel{541/1600}\ 31/265 \rightarrow C_2(4) = C_2^{-1} = 541/1600 \Rightarrow \cancel{C_2 = \frac{1600}{541}}\ \frac{31}{265}$

$P(N_1\ N_2\ N_3\ N_4) = C_2 \cdot (\rho_1)^{N_1} \times (\rho_2)^{N_2} \times (\rho_3)^{N_3} \cdot (\rho_4)^{N_4}$
$= 541/1600 \cdot (\frac{1}{2})^{N_1} \times (\frac{1}{4})^{N_2} \times (\cancel{\frac{1}{25}}\ 1)^{N_3} \times (\frac{1}{4})^{N_4}$

e) Bezettingsgraad $= 1 - P(0$ klanten bij station $2)$

$P(0$ klanten bij station $2) = P(0,0,1,0) = 541/1600\ (\frac{1}{2})^1 \times (\frac{1}{4})^0 \times (1/25)^1 \times (1/4)^0 = ..$
$P(0,0,0,1)$ = etc =
$P(0,0,1,1)$ = .. =
$P(2,0,0,0)$ = .. =
$P(0,0,2,0)$ = .. =
$P(0,0,0,2)$ = ..
SOM ....

↳ kanten an $\cancel{P(0020) + P(0010)}$ / $P($ Nee.

Ορμπc 4 MVA (5)

$\lambda_1 = \frac{2}{5} \quad \lambda_2 = \frac{1}{5} \quad \lambda_3 = \frac{1}{5} \quad \lambda_4 = \frac{1}{5}.$

$\mu_1 = \frac{4}{5} \quad \mu_2 = \frac{4}{5} \quad \mu_3 = \frac{1}{5} \quad \mu_4 = \frac{4}{5}.$

$\overline{F}_1(1) = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \quad \overline{F}_1(2) = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \quad \overline{F}_1(3) = 5 \quad \overline{F}_1(4) = \frac{5}{4}.$

$\sum L_1(j) = \lambda_m(i)\, \overline{F}_1(j).$

$= \lambda_m \sum \pi_i \overline{F}_1(i).$

$\underline{m=1}$

$1 = \lambda_M \left\{ \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\cdot 5 + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} \right\}$

$1 = \lambda_M \{2.375\}$

$\lambda_m = \frac{8}{19} \times = \frac{1}{2}$

$\lambda_m(i) = \lambda_M \cdot \pi_i$ $\quad L_1(i)$:

$\lambda_m(1) = \cancel{\lambda_M}\cdot\frac{2}{5} = \cancel{\frac{16}{95}}\ 1/5 \quad \times 5/4 \quad 1 = \cancel{4/19}\ 1/4$

$\text{"}\ (2) = \cancel{\frac{8}{19}}\cdot\frac{1}{5} = \cancel{8/95}\ 1/10 \quad \times 5/4 \quad 2 = \cancel{2/19}\ 1/8$

$\text{"}\ (3) = \cancel{\frac{8}{19}}\cdot\frac{1}{5} = \cancel{8/95}\ 1/10 \quad \times 5 \quad 3 = \cancel{8/19}\ 5/10 = 1/2$

$\text{"}\ (4) = \cancel{\frac{8}{19}}\cdot\frac{1}{5} = \cancel{8/95}\ 1/10 \quad \times 5/4 \quad 4 = \cancel{2/19}\ 1/8$

$L = \frac{1}{2}$

$m=2$

$\overline{F}_2(1) = \frac{1 + 4/19}{4/5} = \cancel{\frac{115}{76}}\ \cancel{\frac{25}{16}} \qquad \sum l_2(i) = \lambda_m(i)\, \overline{F}_2(i)$

$= \lambda_m \sum \pi_i \overline{F}_2(i)$

$\overline{F}_2(2) = \quad = \cancel{\frac{105}{76}}\ 45/32 \qquad 2 = \lambda_m \left\{ \frac{115}{76}\cdot\frac{2}{5} + \frac{105}{76}\times\frac{1}{5} + \frac{135}{19}\times\frac{1}{5} + \frac{105}{76}\times\frac{1}{5} \right\}$

$\overline{F}_2(3) = \quad = \cancel{\frac{135}{19}}\ 2{,}5 \qquad 2 = \lambda_m \{2{,}\cancel{57/19}\ldots\}$

$\overline{F}_2(4) = \quad = \cancel{105/76}\ 45/32 \qquad \lambda_m = 2/2{,}5789 = \cancel{38/49} \quad \lambda_2 = \frac{32}{43}$

5

$\lambda_m(i) = \lambda_m \cdot \pi_i$ $\qquad L_2(i)$

$\lambda_2(1) = \lambda_2 \cdot \pi_1 = \cancel{\frac{38}{49}} \cdot \frac{2}{5} = \cancel{\frac{76}{245}}$ $64/215$ $\times$ $\cancel{\frac{117}{76}}$ $\frac{25}{16}$ $=$ $\cancel{23/49}$ $\quad 20/43$

$\quad 32/43$

$\lambda_2(2)$ $\quad 32/43 = \cancel{\frac{38}{49}} \cdot 1/5 = \cancel{\frac{38}{245}}$ $32/215$ $\times$ $\cancel{105/76}$ $45/32$ $=$ $3/14$ $\quad 9/43$

$\lambda_2(3)$ $\quad 32/43 = \cancel{\frac{38}{49}} \cdot 1/5 = \cancel{\frac{38}{245}}$ $32/215$ $\times$ $\cancel{135/19}$ $7{,}5$ $=$ $54/49$ $\quad 48/43$

$\lambda_2(4)$ $\quad 32/43 = \cancel{\frac{38}{49}} \cdot 1/5 = \cancel{38/245}$ $32/215$ $\times$ $\cancel{105/76}$ $45/32$ $=$ $3/14$. $\quad \underline{9/43}$ $= 2$.

$= 2$

(5)

$M = 2$ Buzen $\quad C_i(k) = C_{i-1}(k) + \rho_i C_i(k-1)$ $\qquad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} =$

$C_i(k) = \rho_i^{k} \quad (i=0\ k\ldots)$

$\rho_1 = \frac{2/5}{4/5} = \frac{1}{2}$

$\rho_2 = \frac{1}{4}$

$\rho_3 = 1$

$\rho_4 = \frac{1}{4}$

$C_1(0) = \frac{1}{2}^{0} = 1 \qquad C_2(0) = \frac{1}{4}^{0} = 1$

$C_1(1) = \frac{1}{2}^{1} = \frac{1}{2} \qquad C_2(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}^{1} = \frac{3}{4}$

$C_1(2) = \frac{1}{2}^{2} = \frac{1}{4} \qquad C_2(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}^{1} = \frac{7}{16}$

$C_1(3) = \frac{1}{2}^{3} = \frac{1}{8} \qquad C_2(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} = \frac{15}{64}$

$C_1(4) = \frac{1}{2}^{4} = \frac{1}{16} \qquad C_2(4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{64} = \frac{31}{256}$ $\qquad C = \frac{1}{C_2(4)} = \frac{256}{31}$

$P_2(n_1; n_2, n_3; n_4) = \frac{256}{31} \cdot \prod_{i=1}^{4} \rho_i^{k_i}$

$P_2(1\ 1\ 0\ 0) = \frac{256}{31} \cdot (\rho_1^1 \times \rho_2^1 \times \rho_3^0 \times \rho_4^0) = 1{,}03$

$(1\ 0\ 1\ 0) =$

$(1\ 0\ 0\ 1) =$

$(0\ 1\ 1\ 0) =$

$(0\ 1\ 0\ 1) =$

$(0\ 0\ 1\ 1) =$

$(0\ 0\ 0\ 2)$ $\qquad$ etc.

$(0\ 0\ 2\ 0)$

$(0\ 2\ 0\ 0)$

$(2\ 0\ 0\ 0)$

$1 - P($

Kenmerk: EWI08/TW/SOR/RB
Datum: 4 April 2008

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Dinsdag 8 april 2008, 9:00 – 12:00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Eindcijfer = (aantal behaalde punten+10)/10.
Vermeld ook uw studentnummer op uw werk en tentamenbriefje.

Opgave 1 (20 punten)
Z. Eiler heeft dringend binnen 4 weken geld nodig, en wil daartoe zijn boot verkopen binnen maximaal 4 weken. In de komende vier weken ontvangt Eiler wekelijks een bod. Stel dat op grond van ervaringen van de door Eiler ingeschakelde bemiddelaar de kansverdelingen van de hoogten van boden op vergelijkbare boten (in duizenden Euro's) in de vier achtereenvolgende weken gegeven worden in de volgende tabel.

bod	1^e week	2^e week	3^e week	4^e week
140	0.4	0.5	0.4	0.6
144	0.4	0.5	0.3	0.2
148	0.2	0.0	0.3	0.2

Na ieder bod beslist Eiler of hij het bod accepteert of niet. Als Eiler het bod niet accepteert vervalt het bod. Heeft Eiler de boden in de eerste drie weken afgewezen dan is hij verplicht het bod in de vierde week te accepteren. Eiler wil de verwachte verkoopprijs maximaliseren.

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Definieer de fasen, toestanden, beslissingen, en de optimale waardefunctie.
b) Bepaal de optimale verkoopstrategie. Hoe groot is de optimale verwachte verkoopprijs?

Opgave 2 (25 punten)
De eigenaar van een mijn moet wekelijks beslissen over de hoeveelheid springstof die hij op zaterdag wil inzetten voor de ontginning van zijn mijn. Hij kan kiezen uit twee opties: een lage hoeveelheid springstof (L) en een hoge hoeveelheid springstof (H). Hij deelt de wekelijkse opbrengst van de mijn in drie categorieën: OG=onder gemiddeld, G=gemiddeld en BG=boven gemiddeld en gelooft dat de opbrengst stochastisch afhangt van zowel de opbrengst van de vorige week als de hoeveelheid gebruikte springstof in de huidige week. Dit wordt gemodelleerd door de volgende overgangskansen:

(6)

Opbrengst vorige week	Springstof: L 100			Springstof: H 300		
	Opbrengst van deze week			Opbrengst van deze week		
	BG	G	OG	BG	G	OG
1200 ~~800~~ — BG	0.2	0.5	0.3	0.6	0.3	0.1
1000 — G	0	0.6	0.4	0.4	0.5	0.1
800 ~~1200~~ — OG	0	0.3	0.7	0.2	0.7	0.1

Veronderstel dat de hoeveelheden springstof L en H respectievelijk € 100.000 en € 300.000 kosten, en dat de wekelijkse opbrengst (exclusief springstofkosten) behorende bij OG, G, BG respectievelijk zijn: € 800.000, € 1.000.000, en € 1.200.000. De disconteringsfactor is 0.95 op weekbasis. Het doel van de eigenaar is maximalisering van de verwachte contante waarde van de opbrengsten. $\alpha = 0.95$

a) Geef de optimaliteitsvergelijkingen voor dit probleem.
b) Voer twee iteraties uit van het Waarde-iteratie algoritme.
c) Kies zelf een stationaire politiek en onderzoek m.b.v. het strategie of politiek-iteratie algoritme (policy iteration) of de door u gekozen politiek optimaal is.
d) Formuleer een L.P.-model waarmee dit probleem opgelost kan worden. Beschrijf hoe in principe uit de oplossing van dit L.P.-model de optimale politiek gevonden wordt.

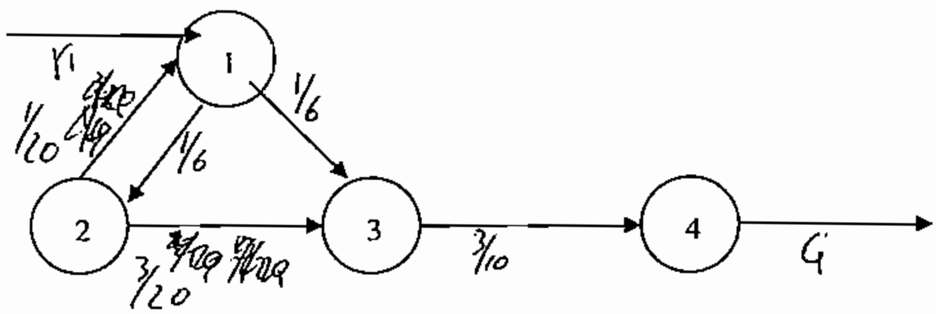
min V> ...

Opgave 3 (25 punten)
Een apparaat bevat een onderdeel dat essentieel is voor de werking van dit apparaat: valt het onderdeel uit dan valt ook het apparaat uit. Om dit uitvalrisico te verkleinen besluit men om naast het onderdeel een tweede identiek onderdeel parallel te zetten. Dit houdt in dat als het actieve onderdeel uitvalt het parallelle (stand-by) onderdeel actief wordt en de functie direct overneemt. Een onderdeel dat defect raakt wordt direct gerepareerd, waarna het (als nieuw) in het apparaat wordt terug geplaatst.
De tijd tussen actief worden en de uitval van een onderdeel is exponentieel verdeeld met gemiddelde $1/\lambda$. De reparatieduur is exponentieel verdeeld met gemiddelde $1/\mu$. Alle tijdsduren zijn onderling onafhankelijk.

a) Definieer een toestandsproces met zijn toestanden en teken het bijbehorende transitiediagram (of overgangsintensiteitendiagram). Beschrijf een wachtmodel met hetzelfde diagram.
b) Bepaal de kans dat het apparaat niet werkt.
c) Hoeveel reparaties worden gemiddeld per tijdseenheid uitgevoerd?
d) Hoe groot is de gemiddelde tijd gedurende welke het apparaat ononderbroken werkt?
e) Stel dat de reparatiecapaciteit wordt beperkt tot 1 monteur die alleen deze onderdelen repareert en die aan slechts 1 onderdeel tegelijk werkt. Hoe ziet het transitiediagram eruit?

Opgave 4 (20 punten)

Beschouw het open netwerk uit onderstaande figuur. Het wachtrijsysteem bestaat uit 4 wachtrijen, 1, 2, 3 en 4, ieder met een enkele bediende en onbeperkte wachtrij waarin klanten op volgorde van binnenkomst worden bediend. Het aankomstproces bij wachtrij 1 is een Poissonproces met intensiteit γ_1 jobs per uur. Wachtrijen 1, 2 en 3 hebben exponentieel verdeelde bewerkingstijden, met gemiddeld aantal jobs dat verwerkt kan worden per uur respectievelijk 20, 12 en 18. Wachtrij 4 heeft bewerkingstijd met algemene verdeling G, met gemiddeld aantal jobs dat verwerkt kan worden per uur gelijk aan $1/\mu_4$, en variantie σ^2. De overgangskansen zijn als volgt: $r_{12}= r_{13}=0.5$, $r_{21}=0.25$, $r_{23}=0.75$, $r_{34}=1$.



a) Beschouw het netwerk zonder wachtrij 4 (dus een job verlaat het netwerk vanuit wachtrij 3). Formuleer de stroomvergelijkingen voor het deel van het netwerk bestaande uit de wachtrijen 1, 2 en 3, en los deze op.
b) Hoe luidt de stationariteitsvoorwaarde?
c) Laat $\gamma_1 = 14$ jobs per uur. Geef de kansverdeling van de wachtrijlengte bij station 1, 2, en 3 (de marginale verdelingen).
d) Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job in het deel van het netwerk bestaande uit wachtrijen 1, 2 en 3?
e) Beargumenteer dat het vertrekproces bij wachtrij 3 een Poissonproces is, en geef de intensiteit van dit proces.
f) Neem aan dat het aankomstproces bij station 4 een Poissonproces is met intensiteit γ_1 jobs per uur. Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job bij wachtrij 4? Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job in het gehele netwerk?

(6)

Opgave 1

fase n = weken $n=1,2,3,4$
beslissing d = bod accepteren of niet
toestand = opbrengsten bod 140-144-148.

$f_n(x) = \max\{e(i,d) + \sum_j p(j|i,d) f_{n+1}$

optimale volgorde.
W=1 148 Accept. , (140/144 niet Acc)
N=2 140/144 niet Accept (148 k.n)
N=3 144/148 Accepteren (140 niet Acc)
N=4 Accepteren Alles.

$V_4(140) = \max\{140\}$
$V_4(144) = \max\{144\}$
$V_4(148) = \max\{148\}$

Niet Accepteren
kans op bod wk 4
gebruiken.

$V_3(140) = \max \begin{cases} 140 & [A] \\ 0{,}6\, V_4(140) + 0{,}2\, V_4(144) + 0{,}2\, V_4(148) = 142{,}4 & [NA]^* \end{cases}$

Niet Accepteren bod 140 in week 3 betekent dat je automatisch naar week 4 gaat dus gebruik 0,6 - 0,2 - 0,2.

$V_3(144) = \max \begin{cases} 144 & [A]^* \\ 142{,}4 & [NA] \end{cases}$

$V_3(148) = \max \begin{cases} 148 & [A]^* \\ 142{,}4 & [NA] \end{cases}$

$V_2(140) = \max \begin{cases} 140 & [A] \\ 0{,}4\, V_3(140) + 0{,}3\, V_3(144) + 0{,}3\, V_3(148) = 144{,}56. & [NA]^* \end{cases}$

$V_2(144) = \max \begin{cases} 144 & [A] \\ 144{,}56. & [NA]^* \end{cases}$

$V_2(148) = \max$ { Bestaat Niet.

$$V_0 = \underbrace{0{,}4 \times 144{,}56}_{V_1(140)} + \underbrace{0{,}4 \times 144{,}56}_{V_1(144)} + \underbrace{0{,}2 \cdot 148}_{V_1(148)} = 145{,}25$$

$V_1(140) = \max \begin{cases} 140 & [A] \\ 0{,}5\, V_2(140) + 0{,}5\, V_2(144) = 144{,}56 & [NA]^* \end{cases}$

$V_1(144) = \max \begin{cases} 144 & [A] \\ 0{,}5\, V_2(140) + 0{,}5\, V_2(144) = 144{,}56 & [NA]^* \end{cases}$

$V_1(148) = \max \begin{cases} 148 & [A]^* \\ 144{,}56 & [NA] \end{cases}$

Opgave 2

a.) Toestand i = opbrengst OG, G, BG
Beslissing d = laag of hoog. opt. verg.

$$V(i) = \max\{ r(i,d) + \alpha \sum p(j \mid i,d)\, V(j) \}$$

b.)
eerst $r(i,d)$ uitrekenen:

	[L]
BG	$0{,}2 \cdot 1200 + 0{,}5 \cdot 1000 + 0{,}3 \cdot 800 - 100 = 880$
G	$0 \cdot 1200 + 0{,}6 \cdot 1000 + 0{,}4 \cdot 800 - 100 = 820$
OG.	$0 \cdot 1200 + 0{,}3 \cdot 1000 + 0{,}7 \cdot 800 - 100 = 760$

	[H]
BG	$0{,}6 \cdot 1200 + 0{,}3 \cdot 1000 + 0{,}1 \cdot 800 - 300 = 800$
G	$0{,}4 \cdot 1200 + 0{,}5 \cdot 1000 + 0{,}1 \cdot 800 - 300 = 760$
OG	$0{,}2 \cdot 1200 + 0{,}7 \cdot 1000 + 0{,}1 \cdot 800 - 300 = 720.$

($V_0(BG) = V_0(G) = V_0(OG) = 0$ niet opschrijven). DAMAGE!

$$V_1(BG) = \max\begin{cases} 880 + 0{,}95(0{,}2\, V_0(BG) + 0{,}5\, V_0(G) + 0{,}3\, V_0(OG)) \; [L] & = 880^* \; [L] \\ 800 + 0{,}95(0{,}6\, V_0(BG) + 0{,}3\, V_0(G) + 0{,}1\, V_0(OG)) \; [H] & = 800 \end{cases}$$

$$V_1(G) = \max\begin{cases} 820^* \\ 760 \end{cases} [L] \quad \begin{matrix} 820 + 0{,}95(0{,}6\, V(G) + 0{,}4\,(OG)) \\ 760 + 0{,}95(0{,}4\, V(BG) + 0{,}5\,(V(G)) + 0{,}1\, V(OG)) \end{matrix}$$

$$V_1(OG) = \max\begin{cases} 760^* \\ 720 \end{cases} [L] \quad \begin{matrix} 760 + 0{,}95(0{,}3\, V(G) + 0{,}7\,(V(OG)). \\ 720 + 0{,}95(0{,}2\, V(BG) + 0{,}7\,(V(G) + 0{,}1\, V(OG)) \end{matrix}$$

$$V_2(BG) = \begin{cases} 880 + 0{,}95(0{,}2 \cdot 880 + 0{,}5 \cdot 820 + 0{,}3 \cdot 760) \; [L] = 1653{,}3 \; * \\ 800 + 0{,}95(0{,}6 \cdot 880 + 0{,}3 \; 820 + 0{,}1\, 760) = 1607{,}5 \; [H] \end{cases}$$

$$V_2(G) = \begin{cases} 820 + 0{,}95(0{,}6 \cdot 880 + 0{,}4 \cdot 760) = 1570{,}2^* \; [L] \\ 760 + 0{,}95(0{,}4 \cdot 880 + 0{,}5 \cdot 820 + 0{,}1 \cdot 760) = 1556{,}1 \; [H] \end{cases} \qquad L\text{-}L\text{-}H.$$

$$V_2(BG) = \begin{cases} 760 + 0{,}95(0{,}3 \cdot 880 + 0{,}7 \cdot 760) = 1499{,}1 \; [L] \\ 720 + 0{,}95(0{,}2 \cdot 880 + 0{,}7 \cdot 820 + 0{,}1 \cdot 760 = 1504{,}7. \; [H] * \end{cases}$$

(6)

c.) $BG = x \quad G = y \quad OG = z$

$$x = 880 + 0{,}95(0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}3z)$$

① $x = 880 + 0{,}19x + 0{,}475y + 0{,}285z$ [L]

$$y = 820 + 0{,}95(0{,}6y + 0{,}4z)$$

② $y = 820 + 0{,}57y + 0{,}38z$ [L]

$$z = 720 + 0{,}95(0{,}2x + 0{,}7y + 0{,}1z)$$

③ $z = 720 + 0{,}19x + 0{,}665y + 0{,}095z$ [H]

politiek L-L-H.

①) $0{,}81x = 880 + 0{,}475y + 0{,}285z$

$$x = \frac{880}{0{,}81} + \frac{0{,}475}{0{,}81}y + \frac{0{,}285}{0{,}81}z$$

② $0{,}43y = 820 + 0{,}38z$

$$y = \frac{820}{0{,}43} + \frac{0{,}38}{0{,}43}z \quad Ⓐ$$

③ $0{,}905z = 720 + 0{,}19x + 0{,}665y$

$$z = \frac{720}{0{,}905} + \frac{0{,}19}{0{,}905}x + \frac{0{,}665}{0{,}905}y \quad Ⓑ$$

$x = 15982{,}24573$ (BG)
$y = 15900{,}46275$ (G)
$z = 15834{,}73416.$ (OG)

Ⓐ $x = \frac{880}{0{,}81} + \frac{0{,}475}{0{,}81}\left(\frac{820}{0{,}43} + \frac{0{,}38}{0{,}43}z\right) + \frac{0{,}285}{0{,}81}z$

$$x = \frac{880}{0{,}81} + 1118{,}288831 + \frac{1805}{3483}z + \frac{0{,}285}{0{,}81}z$$

$x = 2204{,}708584 + \frac{6061}{6966}z$ invullen in ③

Ⓑ $z = \frac{720}{0{,}905} + \frac{0{,}19}{0{,}905}\left(2204{,}708584 + \frac{6061}{6966}z\right) + \frac{0{,}665}{0{,}905}\left(\frac{820}{0{,}43} + \frac{0{,}38}{0{,}43}z\right)$

$$z = \frac{720}{0{,}905} + 462{,}866953 + 0{,}18266414z + 1401{,}259155 + 0{,}649363985z$$

$$z = 2659{,}706261 + 0{,}8320334125z$$

$z = 15834{,}73416.$ invullen in Ⓐ en ② geeft x en y

$$V_{\pi}(BG) = \max \begin{cases} 880 + 0{,}95(0{,}2 \cdot 15982 + 0{,}5 \cdot 15900 + 0{,}3 \cdot 15835) = 15982 \\ 800 + 0{,}95(0{,}6 \cdot 15982 + 0{,}3 \cdot 15900 + 0{,}1 \cdot 15835) = 15945^* \,[H] \end{cases}$$

$$V_{\pi}(G) = \max \begin{cases} 820 + 0{,}95(0{,}6 \cdot 15900 + 0{,}4 \cdot 15835) = 15900^* \,[L] \\ 760 + 0{,}95(0{,}4 \cdot 15982 + 0{,}5 \cdot 15900 + 0{,}1 \cdot 15835) = 15889 \end{cases}$$

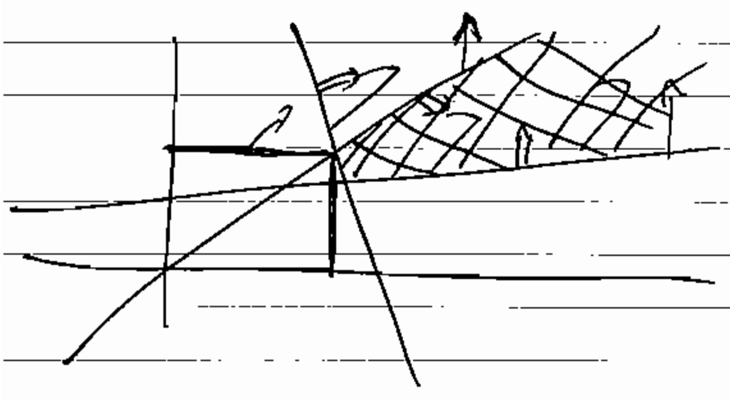
$$V_{\pi}(OG) = \begin{cases} 760 + 0{,}95(0{,}3(15900) + 0{,}7(15835)) = \cancel{20553^*}\ 15821 \\ 720 + 0{,}95(0{,}2(15982) + 0{,}7(15900) + 0{,}1(15835)) = 15834{,}605^* \,[H] \end{cases}$$

$V_{av.}$ $[L-L-H] \rightarrow$ naar $[H, L-H]$ verandering polichel $\rightarrow$ niet optimaal.

d. $\text{MIN} \sum X+Y+Z$ ~~$X_1+Y_1+Z_1+X_2+Y_2+Z_2$~~ $\begin{pmatrix} X_1 = L & Y_1 = L & Z_1 = L \\ X_2 = H & Y_2 = H & Z_2 = H. \end{pmatrix}$

$X_1 \geq 880 + 0{,}95(0{,}2\, X_1 + 0{,}5\, Y_1 + 0{,}3\, Z_1)$
$X_2 \geq 800 + 0{,}95(0{,}6\, X_2 + 0{,}3\, Y_2 + 0{,}1\, Z_2)$
$Y_1 \geq 760 + 0{,}95(0{,}3\, Y_1 + 0{,}7\, Z_1)$
$Y_2 \geq 720 + 0{,}95(0{,}2\, X_2 + 0{,}7\, Y_2 + 0{,}1\, Z_2)$
$Z_1 \geq 760 + 0{,}95(0{,}3\, Y_1 + 0{,}7\, Z_1)$
$Z_2 \geq 720 + 0{,}95(0{,}2\, X_2 + 0{,}7\, Y_2 + 0{,}1\, Z_2).$

Oplossen van dit LP probleem genereert waarde voor X, Y, Z.
Grafisch weergegeven wordt er een vlak vastgelegd met optimale oplossingen. $\Rightarrow$ optimale polichel



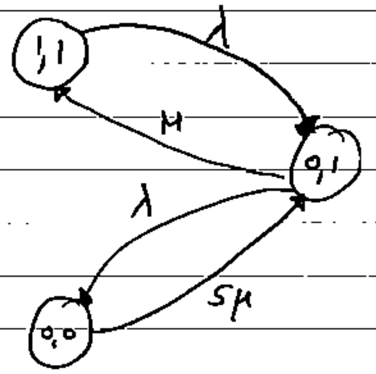
ExxonMobil

Opgave 3

a) fase $\begin{cases} X = \text{status 'hoofd' onderdeel} \\ Y = \text{status 'parallel' onderdeel} \end{cases}$

toestand i = 0 of 1 (0 = kapot ; 1 = werkend)

Transitiediagram: Stat. verg (wachtmodel).



$s\mu P_{00} = \lambda P_{01}$
$(\lambda+\mu)P_{01} = \lambda P_{11} + s\mu P_{00}$
$\lambda P_{11} = \mu P_{01}$

onbekend hoeveel servers (monteurs) voor reparatie (s)

b. P(kans apparaat niet werkt) = P(kans beide onderdelen kapot)

Dus $P_{00} = \frac{\lambda}{s\mu} P_{01} \Rightarrow P_{00} = \frac{1}{s}\rho P_{01}$ $\quad P_{00} = 1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu}$

c. Aantal reparaties per tijdseenheid → kijk naar reparatie tijden

Dus → $s P_{00} + 1 P_{01}$ $\left[(2P_{00} + 1P_{01}) \right]$? ↳ 2 servers?

→ kans werkt
a(t) = betrouwbaarheid
→ systeem werkt als de gehele system niet in reparatie is $e^{-\mu t}$
$1-e^{-\mu t}$.

d. (Reparatieduur is exponentieel verdeeld → $A(t) = 1-e^{-\mu t}$?) zie ook H2004 3g

Apparaat werkt wanneer minimaal 1 onderdeel werkt.
↳ is bezet

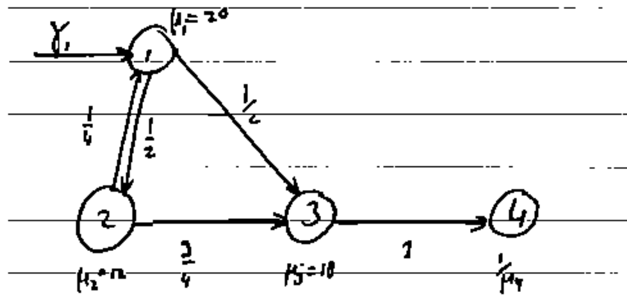
time between failures : $e^{-\lambda t}$.

In dit geval $\boxed{A(t) = 1-e^{-\lambda t}}$

Dus wanneer 2 onderdelen defect zijn werkt apparaat niet. $1-P_{00} \Rightarrow 1-\frac{1}{s}\rho P_{01}$

e. Nu voor s een 1 invullen!

Opgave 4



$\mu_1 = 20$

$\mu_2 = 12$

$\mu_3 = 18$

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) P_1 = \frac{1}{4} P_2 + \gamma_1 \quad \Rightarrow P_1 = \frac{1}{4} P_2 + \gamma_1$

$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) P_2 = \frac{1}{2} P_1 \quad \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2} P_1 \quad \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} P_2 + \gamma_1\right) \Rightarrow \frac{7}{8} P_2 = \frac{4}{7}\gamma_1$

$P_3 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{3}{4} P_2 \quad \Rightarrow P_3 = \frac{1}{8} P_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{3}{4} P_2 \quad \Rightarrow P_3 = \frac{7}{8} P_2 + \frac{1}{2}\gamma_1$

Dus $P_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{7}\gamma_1\right) + \gamma_1 = 1\frac{1}{7}\gamma_1$

$P_2 = \frac{4}{7}\gamma_1$

$P_3 = \gamma_1$

b) $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$, $\rho < 1$ want 3 M/M/1 systemen.

Dus $\frac{1\frac{1}{7}\gamma_1}{20} < 1$; $\frac{\frac{4}{7}\gamma_1}{12}$; $\frac{\gamma_1}{18} < 1$

$\boxed{\gamma_1 < 17{,}5}$ $\quad \gamma_1 < 21 \quad \gamma_1 < 18$

c) $\gamma_1 = 14$ kansverdeling $P(k_1; k_2, k_3) = \prod_{i=1}^{3} \underbrace{P_i(k_i)}$

$= \left(1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i}$

Dus $P(k_1 k_2 k_3) = \left(1 - \frac{16}{20}\right)\left(\frac{16}{20}\right)^{k_1} \times \left(1 - \frac{12}{20}\right)\left(\frac{12}{20}\right)^{k_2} \times \left(1 - \frac{14}{20}\right)\left(\frac{14}{20}\right)^{k_3}$

$\lambda_1 = 14 \cdot 1\frac{1}{7} = 16$

$\lambda_2 = \frac{4}{7} \cdot 14 = 12$

$\lambda_3 = 14$

d) $E(F) = \frac{E(L)}{\lambda} \overset{EN_i}{\Rightarrow} \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda}$ $\quad EN_1 = \frac{4/5}{1/5} = 4 \quad EN_3 = \frac{7/9}{2/9} = 3{,}5$

$EN_2 = \frac{2/3}{1/3} = 2 \quad 4 + 3{,}5 + 2 = 9{,}5$ jobs / systeem.

$E(F) = \frac{9{,}5}{14} = \frac{19}{28}$

e.) Verwerking bij bediende 3 is exponentieel dus output genereert tussenaankomsttijden die ook exponentieel zijn verdeeld dus er is sprake van een Poissonproces met intensiteit. γ

Definitie Poissonprocess:
- indien aankomstproces een vernieuwingsprocess is en ($X_1 - X_N$ o.o en identiek verdeeld $X_N = T_{N+1} - T_N$)

de tussenaankomsttijden exponentieel verdeeld zijn dan is het aankomstprocess poisson verdeeld.

f. $E(W) = \frac{L_w}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \Rightarrow \frac{\rho \; \frac{\gamma}{\mu}}{\mu(1-\frac{\gamma}{\mu})} \Rightarrow \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu(1-\frac{\gamma}{\mu})}$

$\rightarrow$ M/G/1 – Pollaczek / Khintchine formule

$$E(W) = \frac{\rho}{2(1-\rho)\mu}\left\{1 + (\mu\sigma)^2\right\}$$

$$\frac{\frac{\gamma}{\mu}}{2(1-\frac{\gamma}{\mu})\mu}\left\{1 + (\mu\sigma)^2\right\}$$ (A) wachttijd $+ \frac{19}{28}$.

$\underbrace{\overbrace{\text{zie d)}}^{(1)+(2)+(3)}}_{\frac{19}{28}} + \underbrace{\overbrace{\text{''}}^{(A)\text{ wachttijd}} + \overbrace{\frac{1}{\mu_4}}^{\text{bediening}}}_{\text{gem. verblijftijd job wachtrij 4}}$

$\Rightarrow \underset{\text{geheel systeem}}{W} = \frac{19}{28} + \frac{\rho}{2(1-\rho)\mu}\left\{1 + (\mu\sigma)^2\right\} + \frac{1}{\mu_4}$

totaal verblijftijd gehele netwerk.

7

LEO

FACULTEIT MANAGEMENT en BESTUUR
Kenmerk: OMPL07.011/lw
Datum: 30 maart 2007

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Dinsdag 10 april 2007, 9.00-12.00 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Gelieve het blok **bovenaan** het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (9 punten)

DP

Sjonnie heeft een nieuwe auto besteld bij zijn dealer. Over 4 weken kan hij hem ophalen. Voordat het zover is, wil hij zijn oude auto nog verkopen. Zijn dealer heeft hem er 450 euro voor geboden. Toch wil Sjonnie het ook nog even proberen via internet veilingen. Elke veiling duurt 1 week. Biedingen komen binnen gedurende de week en blijven de hele week geldig. Het heeft daarom geen zin hier tussentijds op te reageren. Aan het einde van de week ben je natuurlijk alleen geïnteresseerd in het hoogste bod. Ben je niet tevreden met het hoogste bod, dan heb je de mogelijkheid een nieuwe veiling te starten. Sjonnie schat zijn kansen in elke veiling als volgt in:

Hoogste bod	Kans	
400	0.4	160
500	0.3	150
600	0.2	120
700	0.1	70

Zoals gezegd, wil Sjonnie zijn oude auto verkocht hebben uiterlijk aan het einde van week 4. Hij kan dus maximaal 4 veilingen starten voor zijn oude auto. De kosten van een veiling zijn 25 euro. Deze bestaan uit advertentiekosten, maar ook uit kosten voor het langer houden van de oude auto (verzekering en belasting). Het aanbod van de dealer blijft geldig, Sjonnie kan dus op elk moment terugvallen op het bod van 450 euro.

a) Welke keuzes heb je op de verschillende beslismomenten?
b) Benoem de fasen n, toestanden i, beslissingen d, en optimale waardefunctie $f_n(i)$ behorende bij dit stochastische dynamische programmeringsprobleem.
c) Geef de recurrente betrekking (recursie) voor de optimale waardefunctie.

d) Bepaal de optimale politiek door het opstellen van een *"policy table"* (beslissingen voor elke fase en toestand). Wat is de maximale verwachte opbrengst voor Sjonnie's oude auto?

Opgave 2 (9 punten)

Vrachtwagenbestuurder Jack bezit een eigen vrachtwagen waarmee hij internationaal transport rijdt. Jack vervoert een type lading waarvan elke dag om 7 uur 's morgens, transportorders worden aangeboden. Zo'n transportorder bestaat uit het vervoeren van lading tussen twee verschillende landen. Een transportorder moet altijd dezelfde dag (d.w.z. de dag waarop hij is aangeboden) nog worden geleverd op zijn bestemming. De transporttijden zijn natuurlijk zodanig dat dit ook mogelijk is. Indien Jack een nachtje slaap overslaat, lukt het hem zelfs om na levering van een order leeg naar een ander land te rijden en daar aan te komen voor 7 uur de volgende morgen, dus nog voor de volgende aanbiedingsronde van transportorders.

A -> B leeg kosten

Jack kan er zeker van zijn dat hij elke dag een nieuwe order ontvangt. Vanwege concurrentie en beperkingen op de levertijden zal dit echter nooit een order zijn die vertrekt uit een ander land dan waar hij op dat moment aanwezig is. De kans op een order tussen een vertrekland en bestemmingsland, gegeven dat Jack zich bevindt in het vertrekland, wordt gegeven door:

Altijd order in land waar hij is voor 7.

van \ naar	Land A	Land B	Land C
Land A	0	1/3	2/3
Land B	1/3	0	2/3
Land C	1/3	2/3	0

De winst van Jack bestaat uit directe opbrengsten voor het vervoeren van lading (gegeven door inkomsten van orders minus de bijbehorende transportkosten) minus zijn kosten voor leeg rijden. Omdat de directe opbrengst van de diverse trajecten nogal verschilt, is het voor Jack belangrijk dat hij na levering van een order goed bedenkt of hij in het huidige land wil wachten of leeg naar een ander land wil rijden. Het beslismoment van Jack is dus altijd aan het einde van de dag na levering van een order!

De directe opbrengst op een dag vanaf een bepaald vertrekland is stochastisch omdat deze bepaald wordt door de onzekere bestemming van de transportorder. Gelukkig kan Jack ook een beetje modelleren. Hij heeft daarom alvast een tabel opgesteld voor de verwachte directe opbrengsten in een dag, gegeven een bepaalde vertreklocatie:

[illegible]	Verwachte directe opbrengst
Land A	6
Land B	9
Land C	3

De kosten voor het leeg rijden naar een ander land worden gegeven door:

van \ naar	Land A	Land B	Land C
Land A	0	3	4
Land B	3	0	2
Land C	4	2	0

Indien Jack besluit leeg te rijden naar een ander land, dan moeten de kosten hiervan in mindering worden gebracht op de verwachte directe opbrengst in het nieuwe land. Jack wil een politiek opstellen zodanig dat zijn verdisconteerde winst (disconteringsfactor van 0.9) gemaximaliseerd wordt.

a) Modelleer dit probleem als een Markov beslissingsproces.
b) Geef de optimaliteitsvergelijkingen.
c) Geef een LP model waarmee de optimale politiek bepaald kan worden.
d) Beschouw de politiek [A,B,C], d.w.z. ga na het leveren van een order nooit leeg naar een ander land. Voer 1 iteratie *policy iteration* uit, om te controleren of deze politiek optimaal is. Zo niet, geef dan de nieuwe politiek.

Opgave 3 (10 punten)
Beschouw een wachtsysteem met eindige wachtruimte. Er kunnen maximaal 4 klanten in het systeem aanwezig zijn. Klanten arriveren in groepjes volgens een Poissonproces met intensiteit λ. De groepsgrootte is 1, 2 of 3 personen. De kans op aankomst van een groepje met 1, 2 of 3 personen is gelijk aan 1/3. Indien bij aankomst van een groepje de groep niet in zijn geheel naar binnen kan, dan vertrekt zo'n groepje en keert niet meer terug. Bediening vindt individueel plaats. De bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met gemiddelde μ^{-1}. Neem aan dat de bedieningsduren onderling onafhankelijk zijn en onafhankelijk van het aankomstproces.

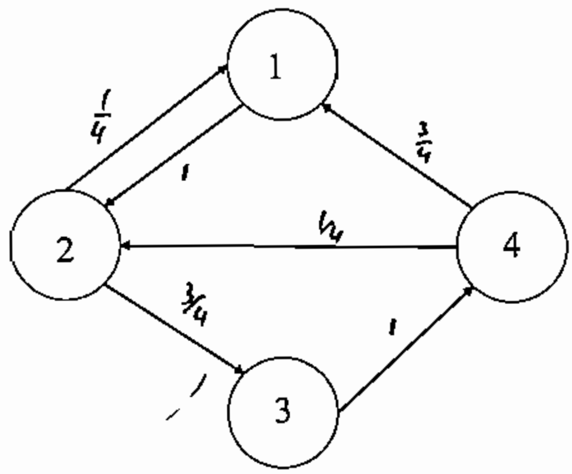
a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen. (Oplossen van de vergelijkingen wordt niet gevraagd!)

De antwoorden van onderstaande vragen mogen uitgedrukt worden in de stationaire kansen P(n), μ en λ.

c) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten dat het systeem binnengaat.
d) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten dat wacht op bediening.
e) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd van een klant in het systeem.
f) Wat is de gemiddelde duur van een periode dat de server onbezet is?

7

Opgave 4 (8 punten)
Beschouw de onderstaande Markov keten.



De overgangskansen van toestand i naar toestand j worden gegeven in de volgende tabel:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markov keten.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 3 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m = 2 klanten in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende klanten. De gemiddelde bedieningsduur bij de verschillende werkstations bedraagt resp. $\mu_1^{-1} = \mu_2^{-1} = \mu_4^{-1} = 53/12$ minuut en $\mu_3^{-1} = 53/24$ minuut.

c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* het verwachte aantal klanten en de gemiddelde verblijftijd bij de 4 stations voor m = 2. (Hint: Laat breuken staan, dan vallen er regelmatig termen tegen elkaar weg. Check: $\lambda_2(1) = 2444/24857$)
d) Geef aan hoe m.b.v. het algoritme van Buzen bepaald kan worden hoe groot in de stationaire situatie de bezettingsgraad van werkstation 3 is. De bezettingsgraad hoeft NIET berekend te worden.

Opgave 1

a) eind iedere week beslissen $\begin{cases} \text{dealen} \\ \text{bod accept.} \\ \text{niet accept, nieuwe veiling.} \end{cases}$

b) fasen n: $n = 1,2,3,4$ eind v.d. week
toestand i: $i = 400, 500, 600, 700$
beslissing d: 1 bod accept [A]
2 nieuwe veiling [NA]
3. dealen. ~~→ niet in recursie opgenomen omdat toelaatbaar~~. [D]

c) $$f_n(400) = \max \begin{cases} 400 \quad [A] \\ \cancel{-25 + 0{,}4 f_{n+1}(400) + 0{,}3 f_{n+1}(500) + 0{,}2 f_{n+1}(600) + 0{,}1 f_{n+1}(700) \; [NA]} \\ \cancel{450 \quad [D]} \end{cases}$$

$$f_n(500) = \max \begin{cases} 500 \\ -25 + 0{,}4 f_{n+1}(400) + 0{,}3 f_{n+1}(500) + 0{,}2 f_{n+1}(600) + 0{,}1 f_{n+1}(700) \\ 450 \end{cases}$$

Zo ook voor $f_n(600)$ en $f_n(700)$

d. Achterwaartse recursie:

$f_4(400) = \max\{400, -25, 450\} = 450$ [D]
$f_4(500) = \max\{500, -25, 450\} = 500$ [A]
$f_4(600) = \max\{600 \;\; -25 \;\; 450\} = 600$ [A]
$f_4(700) = \max\{700 \;\; -25 \;\; 450\} = 700$ [A]

$\to -25 + 180 + 150 + 70$
$f_3(400) = \max\{400, 495, 450\} = 495$ [NA]
$f_3(500) = \max\{500, 495, 450\} = 500$ [A]
$f_3(600) = \max\{600, 495, 450\} = 600$ [A]
$f_3(700) = \max\{700, 495, 450\} = 700$ [A]

$\to \cancel{-25 + (0{,}4 \times 495) + 150 + 120 + 70}$
$f_2(400) = \max(400, 513, 450) = 513$ [NA]
$f_2(500) = \max(500, 513, 450) = 513$ [NA]
$f_2(600) = \max(600, 513, 450) = 600$ [A]
$f_2(700) = \max(700, 513, 450) = 700$ [A]

$-25 + (0{,}4 \cdot 513) + 0{,}3(513) + 120 + 70 = 524{,}1$
$f_1(400) = \max(400, 524{,}1, 450) = 524{,}1$ [NA]
$f_1(500) = \max(500, 524{,}1, 450) = 524{,}1$ NA
$f_1(600) = \max(600, 524{,}1, 450) = 600$
$f_1(700) = \max(700, 524{,}1, 450) = 700$

fase \ toestand	400	500	600	700
1	NA	NA	A	A
2	NA	NA	A	A
3	NA	A	A	A
4	D	A	A	A.

Maximale waarde $= -25 + (0{,}4\ 524{,}1) + (0{,}3 \times 524{,}1) + 0{,}2 \cdot 600 + 0{,}1 \times 700 =$

$= 531{,}87$

Opgave 2

a) $f_*(i) = \max_{d} \{ r(i,d) + \alpha \sum p(i,j) f_*(j)$

↳ geen fasen → V

toestand i = land waar je eind (na de order) vd dag bent (bestemmingsland) i = A, B, C
beslissing d = blijven, leeg rijden naar ander verkeerland d = A, B, C
↳ zoptimas.

$R(i,d)$

$R(A\|A) = 6$	$P(A,A) = 0$
$R(A\|B) = 9 + -3 = 6$	$P(A,B) = 1/3$
$R(A\|C) = 3 + -4 = -1$	$P(A,C) = 2/3$
$R(B\|A) = 6 + -3 = 3$	$P(B,A) = 1/3$
$R(B\|B) = 9$	$P(B,B) = 0$
$R(B\|C) = 3 - 2 = 1$	$P(B,C) = 2/3$
$R(C\|A) = 6 - 4 = 2$	$P(C,A) = 1/3$
$R(C\|B) = 9 - 2 = 7$	$P(C,B) = 2/3$
$R(C\|C) = 3$	$P(C,C) = 0$

b) $V(A) = \max \begin{cases} 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_B + \frac{2}{3}V_C\right) & \text{[Blijven]} \\ 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_C\right) & \text{[NAAR B rijden]} \\ -1 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_B\right) & \text{[NAAR C rijden]} \end{cases}$

$V(B) = \max \begin{cases} 9 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_C\right) & \text{[blijven]} \\ 3 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_B + \frac{2}{3}V_C\right) & \text{[NAAR A]} \\ -1 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_B\right) & \text{[NAAR C]} \end{cases}$

$V(C) = \max \begin{cases} 3 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_B\right) & \text{[blijven]} \\ 2 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_B + \frac{2}{3}V_C\right) & \text{[NAAR A]} \\ 7 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_C\right) & \text{[NAAR B]} \end{cases}$

c) $\min \sum x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 \geq 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)$

$x_1 \geq 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3\right)$

$x_1 \geq -1 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)$

--

-

etc.

d) $V_A = 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_B + \frac{2}{3}V_C\right) \Rightarrow 6 + \frac{3}{10}V_B + \frac{6}{10}V_C$

$V_B = 9 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_C\right) \Rightarrow 9 + \frac{3}{10}V_A + \frac{6}{10}V_C$

$V_C = 3 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}V_A + \frac{2}{3}V_B\right) \Rightarrow 3 + \frac{3}{10}V_A + \frac{6}{10}V_B$

$V_A = 6 + \frac{3}{10}\left(9 + \frac{3}{10}V_A + \frac{6}{10}V_C\right) + \frac{6}{10}V_C$

$6 + 2{,}7 + \frac{9}{100}V_A + \frac{9}{50}V_C + \frac{6}{10}V_C$

$\frac{81}{100}V_A = 8{,}7 + \frac{39}{50}V_C$

$V_A = 290/27 + \frac{26}{27}V_C$

vul in

$V_B = 9 + \frac{3}{10}\left(\cancel{6 + \frac{3}{10}V_B + \frac{6}{10}V_C}\right) + \frac{6}{10}V_C$

$V_B = 9 + 29/9 + \cancel{\frac{1}{15}V_C} + \frac{13}{45}V_C + \frac{6}{10}V_C$

$V_B = 110/9 + \frac{8}{9}V_C$

$V_C = 3 + \frac{3}{10}\left(290/27 + \frac{26}{27}V_C\right) + \frac{6}{10}\left(110/9 + 8/9\, V_C\right)$

$V_C = 3 + 29/9 + \frac{13}{45}V_C + \frac{22}{3} + \frac{8}{15}V_C$

$V_C = 122/9 + 34/45\, V_C$

$\Big\} \; V_C = 610/11$

$V_A = 6350/99$

$V_B = 2030/33$

$$V(A) = \begin{cases} 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}\, 2030/33 + \frac{2}{3}\, 610/11\right) = 635/11 \approx 57{,}7 \\ 6 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}\, 6350/99 + \frac{2}{3}\, 610/11\right) = 1931/33 \approx 58{,}5^{*} \quad \text{[NAAR B rijden]} \\ -1 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}\, 6350/99 + \frac{2}{3}\, 2030/33\right) = 1820/33 \approx 55{,}1 \end{cases}$$

$$V(B) = \begin{cases} 9 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}\, 6350/99 + \frac{2}{3}\, 610/11\right) = 2033/33 \approx 61{,}5^{*} \quad \text{[Blijven]} \\ 3 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}\, 2030/33 + \frac{2}{3}\, 610/11\right) = 602/11 \approx 54{,}7 \\ -1 + 0{,}9\left(\frac{1}{3}\, 6350/99 + \frac{2}{3}\, 2030/33\right) = 1820/33 \approx 55{,}2 \end{cases}$$

$$V(C) = \begin{cases} 3 + 0{,}9\left(\frac{1}{3} \cdot 6350/99 + \frac{2}{3} \cdot 2030/33\right) = 1952/33 \approx 59{,}2 \\ 2 + 0{,}9\left(\frac{1}{3} \cdot 2030/33 + \frac{2}{3}\, 610/11\right) = 591/11 \approx 53{,}7. \\ 7 + 0{,}9\left(\frac{1}{3} \cdot 6350/99 + \frac{2}{3}\, 610/11\right) = 1964/33 \approx 59{,}5^{*} \quad \text{[NAAR B]} \end{cases}$$

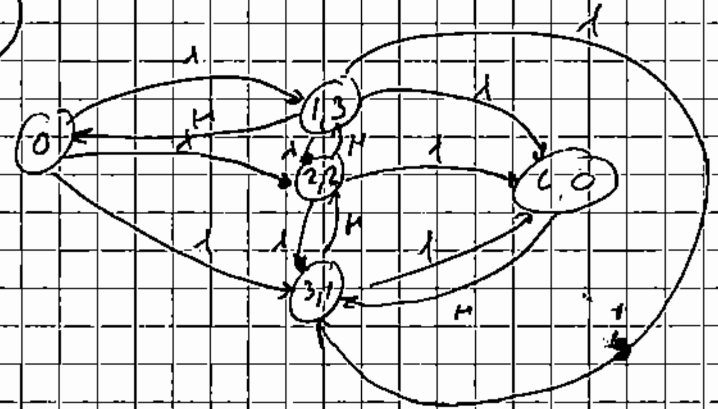
A → leeg NAAR B rijden
B → blijven
C → leeg naar B rijden.

B-B-B.
↳ nieuwe politiek.

③

i = # klanten in systeem. $i = 0,1,2,3,4$
j = ruimte over voor groepen $j = 0,1,2,3$.

a+b



$$3\lambda P_0 = \mu P_{13}$$
$$(3\lambda+\mu)P_{13} = \lambda P_0 + \mu P_{22}$$
$$(2\lambda+\mu)P_{22} = \lambda P_0 + \lambda P_{13} + \mu P_{31}$$
$$(\lambda+\mu)P_{31} = \lambda P_{13} + \lambda P_0 + \lambda P_{22} + \mu P_{40}$$
$$(\mu)P_{40} = \lambda P_{13} + \lambda P_{22} + \lambda P_{31}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{\mu}{3\lambda} P_{13}$$
$$\Rightarrow P_{13} = \frac{\lambda}{(3\lambda+\mu)} P_0 + \frac{\mu}{(3\lambda+\mu)} P_{22}$$
$$\Rightarrow P_{22} = \frac{\lambda}{(2\lambda+\mu)} P_0 + \frac{\lambda}{(2\lambda+\mu)} P_{13} + \frac{\mu}{(2\lambda+\mu)} P_{31}$$
$$\Rightarrow P_{31} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} P_{13} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} P_0 + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)} P_{22} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)} P_{40}$$
$$\Rightarrow P_{40} = \frac{\lambda}{\mu} P_{13} + \frac{\lambda}{\mu} P_{22} + P_{31}$$

c $EL_s = \lambda \cdot EW_s$

$$3\lambda \cdot P_0 + 3\lambda P_{13} + 2\lambda P_{22} + \lambda P_{31}$$

d $EL_q = \lambda \cdot EW_q$

klanten al in S

(1,3) 0 wachtende
(2,2) 1 wachtend
(3,1) 2 wachtend
(4,0) 3 wachtende

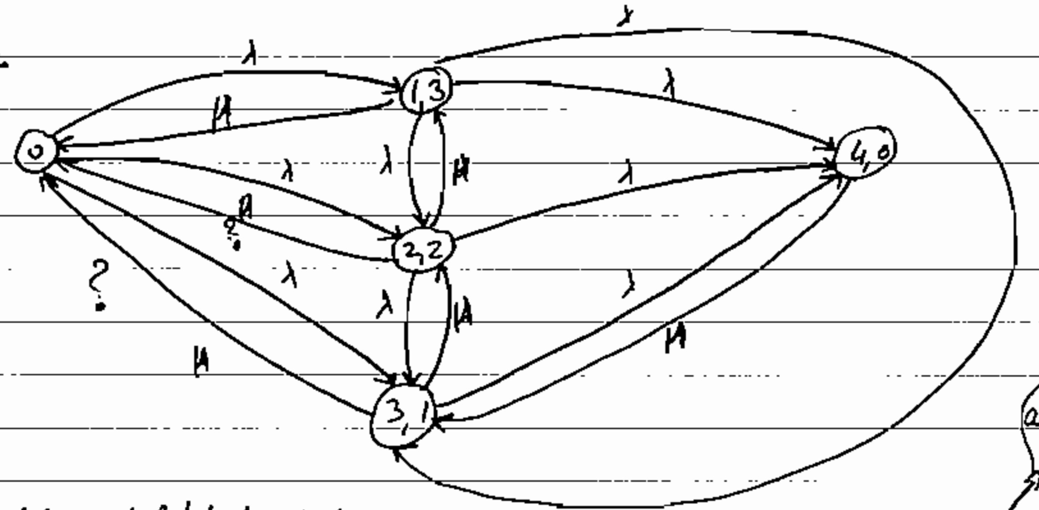
$$0 \cdot P_{13} + 1 \cdot P_{22} + 2 \cdot P_{31} + 3 \cdot P_{40}$$

e $EW = \frac{L_s + L_q}{\lambda}$ ✗ $E(W) = \frac{E(L)}{\lambda(1-P_{k+1})}$ $\frac{3\lambda P_0 + 3\lambda P_{13} + 2\lambda P_{22} + \lambda P_{31}}{3\lambda(1-P_{40})}$

f centra arbeit → geen wachting → geen klant in systeem $\Rightarrow \frac{l}{\lambda}$

Opgave 3 — M/M/1/3

a)



andere optie: j = wachtrij vol of niet

toestand i = aantal klanten in i=1,2,3,4

j = ~~ruimte~~ aantal plekken in systeem voor ontvangst groepen van 1,2 of 3 pens. j = 0,1,2,3

b)

$3\lambda P_0 = \mu P_{13} + \mu P_{22} + \mu P_{31} \Rightarrow P_0 = \mu P_{13} + \mu P_{22} + \mu P_{31} / 3\lambda$

$(3\lambda+\mu)P_{13} = \lambda P_0 + \mu P_{22} \Rightarrow P_{13} = \lambda P_0 + \mu P_{22} / (3\lambda+\mu)$

$(2\lambda+2\mu)P_{22} = \lambda P_0 + \mu P_{31} + \lambda P_{13} \Rightarrow P_{22} = \lambda P_0 + \mu P_{31} + \lambda P_{13} / (2\lambda+2\mu)$

$(\lambda+2\mu)P_{31} = \lambda P_{22} + \lambda P_0 + \lambda P_{13} + \mu P_{40} \Rightarrow P_{31} = \lambda P_{22} + \lambda P_0 + \lambda P_{13} + \mu P_{40} / (\lambda+2\mu)$

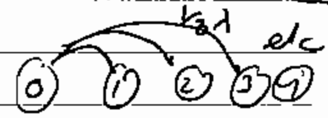
$\mu P_{40} = \lambda P_{13} + \lambda P_{22} + \lambda P_{31} \Rightarrow P_{40} = \lambda P_{13} + \lambda P_{22} + \lambda P_{31} / \mu$

c) Aankomst (intensiteit) $3\lambda(P_0 + P_{13}) + 2(P_{22}) + 1(P_{3,1})$

$EN_s = \lambda \cdot EW_s$ of $EN_s = \lambda EF_s$

Schrijf alleen i = aantal klanten

dus



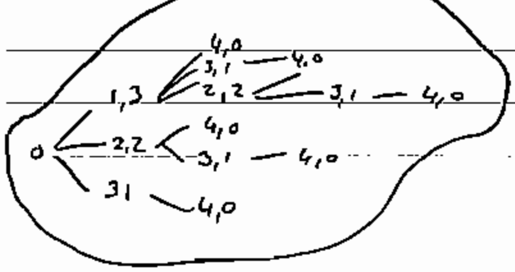
gebruik $\frac{1}{3}\lambda$

d) $EW = \dfrac{EN}{\lambda}$ $\quad (E(L_w) = E(L) - (1-P_0))$

e $EF = \dfrac{EN_s}{\lambda}$ $\quad (EF = EL / \lambda(1-P_{k+1}))$

f. Server onbezet indien wachtrij leeg → P_0

Gemiddelde duur $= \dfrac{1}{\lambda}$ (tussenaankomsttijd van P_0)



Opgave 4

a) $P_1 = \frac{1}{4} P_2 + \frac{3}{4} P_4 \quad \Rightarrow P_1 = \frac{1}{4} P_2 + \frac{3}{4} P_4 \quad \Rightarrow P_1 = \frac{1}{4} \cancel{P_2} \left(\frac{4}{3} P_3\right) + \frac{3}{4} P_3$

$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) P_2 = P_1 + \frac{1}{4} P_4 \quad P_2 = P_1 + \frac{1}{4} P_4 \quad P_1 = \frac{1}{3} P_3 + \frac{3}{4} P_3 = \frac{13}{12} P_3$

$P_3 = \frac{3}{4} P_2 \quad P_3 = \frac{3}{4} P_2 \quad \Rightarrow P_2 = \frac{13}{12} P_3 + \frac{1}{4} P_3 = \frac{4}{3} P_3$

$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) P_4 = P_3 \quad P_4 = P_3 \quad \Rightarrow P_4 = P_3$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \\ \frac{13}{12} P_3 + \frac{4}{3} P_3 + P_3 + P_3 = 1 \\ 53/12\, P_3 = 1 \end{array}\right\} P_3 = \frac{12}{53} \text{ dus } P_1 = \frac{13}{53},\ P_2 = \frac{16}{53},\ P_4\ \frac{12}{53}$$

$$\pi = \left\{ \frac{13}{53} \cdot \frac{16}{53} \cdot \frac{12}{53} \cdot \frac{12}{53} \right\}$$

b) Verwachte aantal overgangen. (Mean first passage time)

$m_{13} = 1 + P_{12} m_{23}$ (A)

~~$m_{13} = 1 + 1 \times \frac{3}{4}$~~

~~$m_{23} = P_{23} +$~~

~~$m_{23} = \frac{3}{4}$~~

$m_{23} = 1 + P_{21}\, m_{13}$ (B)

$m_{23} = 1 + \frac{1}{4} m_{13}$

$m_{13} = 1 + 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} m_{13}\right)$

$m_{13} = 1 + 1 + \frac{1}{4} m_{13}$

$m_{13} = 2 + \frac{1}{4} m_{13}$

$\frac{3}{4} m_{13} = 2$

$m_{13} = 2\frac{2}{3}$

c) MVA eerst $m=1$ $\quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = \frac{12}{53} \quad \mu_3 = \frac{24}{53}$

$F_1(1) = \frac{1}{12/53} = \frac{53}{12} = F_1(2) = F_1(4) \quad F_1(3) = \frac{1}{24/53} = \frac{53}{24}$

~~$\lambda_1(i) = \lambda_1 \Sigma(\pi_i \cdot F_1(i)) \Rightarrow \lambda_1\left(\frac{53}{12} \cdot \frac{13}{53} + \frac{53}{12} \cdot \frac{16}{53} + \frac{53}{24} \cdot \frac{12}{53} + \frac{53}{12} \cdot \frac{12}{53}\right)$~~

$\lambda_1\left(\frac{13}{12} + \frac{4}{3} + \frac{12}{25} + 1\right)$

$\lambda_1($ ~~$3888 / 6900$~~ $) \Rightarrow$

c) $L_1(i) = \lambda_1 \Sigma (\pi_i \cdot F_1(i))$

$$\lambda_1 \left(\frac{53}{12} \times \frac{13}{53} + \frac{53}{12} \cdot \frac{16}{53} + \frac{53}{24} \cdot \frac{12}{53} + \frac{53}{12} \cdot \frac{12}{53} \right)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{13}{12} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 1$$

$$\lambda_1 \left(\frac{47}{12} \right) = 1 \implies \lambda_1 = \frac{12}{47}.$$

$\lambda_1(1) = \lambda_1 \cdot \pi_1$ — $L_1(1) = \lambda_1(1) \times F_1(1)$

$\lambda_1(1) = \frac{12}{47} \cdot \frac{13}{53} = 156/2491$ — $L_1(1) = 156/2491 \times 53/12 = 13/47$

$\lambda_1(2) = 12/47 \cdot 16/53 = 192/2491$ — $L_1(2) = 192/2491 \times 53/12 = 16/47$

$\lambda_1(3) = 12/47 \cdot 12/53 = 144/2491$ — $L_1(3) = 144/2491 \times 53/24 = 6/47$

$\lambda_1(4) = 12/47 \cdot 12/53 = 144/2491$ — $L_1(4) = 144/2491 \times 53/12 = 12/47.$

$m = 2$

$F_2(1) = \left(1 + \frac{13}{47}\right) / \frac{12}{53} = \frac{265}{47}$ $\qquad F_2(3) = (1 + 6/47)/\frac{24}{53} = 2809/1128$

$F_2(2) = \left(1 + \frac{16}{47}\right) / \frac{12}{53} = \frac{1113}{188}$ $\qquad F_2(4) = (1 + 12/47)/\frac{12}{53} = \cancel{708/2491}\ 3127/564$

$L_2(i) = \lambda_2 \Sigma (\pi_i \cdot F_2(i))$

$$= \lambda_2 \left(\frac{13}{53} \cdot \frac{265}{47} + \frac{16}{53} \cdot \frac{1113}{188} + \frac{12}{53} \cdot \frac{2809}{1128} + \frac{12}{53} \cdot \frac{3127}{564} \right) = 2$$

$$= \lambda_2 \left(\frac{469}{94} \right) = 2 \implies \lambda_2 = 188/469$$

$\lambda_2(1) = 188/469 \times 13/53 = 0{,}098\ldots$ — $2444/24857.$ ($\lambda_2 \cdot \pi_i$)

$\lambda_2(2) = 188/469 \times 16/53 = 0{,}1210\ldots$

$\lambda_2(3) = 188/469 \times 12/53 = 0{,}090\ldots$

$\lambda_2(4) = 188/469 \times 12/53 = 0{,}090\ldots$

$L_2(1) = 3444/26857 \cdot \frac{265}{47} = 260/469$
$L_2(2) = 0{,}12.. \cdot 1113/188 = 48/67$
$L_2(3) = 0{,}09.. \cdot 2809/1128 = 106/469$
$L_2(4) = 0{,}09.. \cdot 3127/564 = 236/469.$
L

d) Buren.

$P(0 \text{ jobs bij } n_3) = P(0,0,0,2) + P(0,2,0,0) + P(2,0,0,0) +$
$P(1,1,0,0) + P(1,0,0,1) + P(0,1,0,1)$

$1 - (P\ 0 \text{ jobs bij } N_3) =$ bezettingsgraad werkstation N_3

$\left(P(n_1\ n_2\ n_3\ n_4) = C_m \cdot (\rho_1)^{n_1} \cdot (\rho_2)^{n_2} \cdot (\rho_3)^{n_3} \cdot (\rho_4)^{n_4}\right)$
$C_m^{-1} = C_4(4)$

8

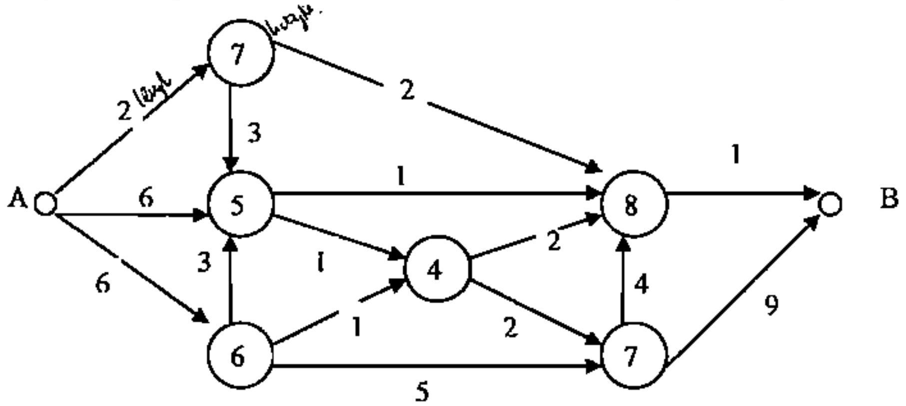
Kenmerk: EWI06/TW/SOR/RB/01
Datum: 20 June 2006

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Maandag 26 juni, 13:30 – 16:30 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Eindcijfer = (aantal behaalde punten+10)/10. Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

<u>Opgave 1</u> (20 punten)

Jan is bezorger in een afgelegen bergachtig gebied. Jan is niet dol op grote hoogten, en zal wanneer hij een pakje moet bezorgen altijd de laagst mogelijke route kiezen, ook wanneer dit niet de kortste route is. Vandaag moet Jan een pakje brengen van A naar B. In onderstaande figuur is schematisch een kaart weergegeven van het gebied, waarin opgenomen de paden, de hoogten van de bergpassen waar die paden overheen lopen en de lengte van de paden. Een punt op een pad ligt altijd lager dan de hoogte van de twee bijbehorende passen. (Label bij de knooppunten geeft de hoogte van de pas, label bij het pad de lengte van het pad. Paden kunnen uitsluitend in de richting van de pijl worden afgelegd.)



a. Jan moet van A naar B en wil een zo laag mogelijk gelegen route kiezen. Dus de hoogste pas die hij passeert dient zo laag mogelijk te zijn. Kies een geschikte nummering van de knooppunten en laat h_i de hoogte van pas i zijn. Geef een dynamische programmeringrecursie (DP recursie) waarmee een optimale route bepaald kan worden. (Uiteraard gaan we er vanuit dat deze route ieder punt hoogstens een maal passeert.) Geef duidelijke definities.
b. Bepaal m.b.v. DP de optimale oplossingen voor Jan's probleem.
c. Jan begrijpt wel dat niet alle paden die zo laag mogelijk liggen even lang zijn. Jan wil graag het kortste pad onder de zo laag mogelijk gelegen paden kiezen. Geef een DP recursie waarmee het kortste pad onder de zo laag mogelijke paden gevonden kan worden.
d. Bepaal m.b.v. DP het kortste pad onder de zo laag mogelijk gelegen paden.
(NB 1. Indien onderdeel a) en/of b) u niet is gelukt mag u een aantal routes als laagste route kiezen om zo in staat te zijn opgave c) en d) te maken.)
(NB 2. Het is bij onderdeel c) en d) echt de bedoeling dat u voor dit onderdeel middels DP uit de laagste routes de kortste vindt door een recursie op te stellen uitgaande van het eindpunt B, dus niet zomaar de kortste route kiezen.)

8

Opgave 2 (25 punten)
Een verkoper AC van airconditioners ziet wel wat in het broeikaseffect en biedt klanten levering en installatie van complete airconditioners aan tegen een aantrekkelijke financiering. AC heeft goed gelet op de verkopen uit het verleden, en de relatie met de geboden rente. AC wil nu kiezen tussen een rentepercentage van 8% en 11%. Alle klanten kopen hun airconditioner met financiering. Indien AC een 8% financiering aanbiedt gedurende de huidige maand, is de kansverdeling van de verkopen gedurende deze maand als weergegeven in de volgende tabel

	Verkoop huidige maand	
Verkoop vorige maand	Goed	Slecht
Goed	0.95	0.05
Slecht	0.40	0.60

Indien AC een 11% financiering aanbiedt gedurende de huidige maand, is de kansverdeling van de verkopen gedurende deze maand als weergegeven in de volgende tabel

	Verkoop huidige maand	
Verkoop vorige maand	Goed	Slecht
Goed	0.80	0.20
Slecht	0.20	0.80

In deze tabellen staat Goed voor 40 airconditioners en Slecht voor 30 airconditioners, dus wanneer de vorige maand 40 airconditioners zijn verkocht, dan is bij 8% financiering de kans op de verkoop van 40 airconditioners deze maand 0.95.
Per airconditioner verdient AC bij 8% financiering 8000 Euro, en bij 11% financiering 10000 Euro. Doel van AC is om de verwachte verdisconteerde opbrengst over een oneindige horizon te maximaliseren. Kies disconteringsfactor $\alpha=0.8$)

a. Geef de optimaliteitsvergelijkingen voor dit probleem.
b. Hoeveel stationaire politieken zijn er? Verklaar uw antwoord.
c. Kies een politiek en controleer m.b.v. het politiek (strategie) iteratie algorithme of deze politiek optimaal is.
d. Voer twee iteraties uit van het waardeiteratie algorithme.
e. Geef een LP model waarmee de optimale politiek bepaald kan worden. Hoe wordt deze politiek na oplossing van het LP model gevonden?

Opgave 3 (25 punten)
Een klein Call Center beschikt over twee agents (bedienden). Bij dit call center komen gesprekken van over de hele wereld binnen met vragen voor ondersteuning bij problemen met de Internet aansluiting. Sommige vragen zijn heel eenvoudig, echter andere vragen blijken zeer tijdrovend te zijn. Na zorgvuldige analyse van de data betreffende aantallen binnenkomende vragen, en lengte van de tijd nodig om de vragen te beantwoorden is gebleken dat vragen binnenkomen volgens een Poisson proces, met gemiddelde van 2 vragen per uur, en dat de lengte van gesprekken die afgehandeld worden door de agents gemiddeld exponentieel verdeeld is met gemiddelde 45 minuten. Om de verzoeken op een eerlijke manier af te handelen worden verzoeken op basis van de volgorde van binnenkomst in behandeling genomen, waarbij één agent aan één vraag werkt. Verzoeken die nog niet in behandeling zijn genomen worden in een wachtrij geplaatst. De kosten voor afhandeling van de vraag bedragen 1 Euro per minuut, en de kosten voor de tijd dat de klant in de wachtrij staat bedragen 0.20 Euro per minuut.

a) Is het systeem stabiel? Nee ρ.

2 p/u $\mu^{-1} = \frac{3}{4}$ $\mu = 1\frac{1}{3}$ $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{1\frac{1}{3}} = 1{,}5 \not< 1$ dus niet stabiel.

Aangezien de wachttijd zeer groot kan zijn, zullen niet alle klanten daadwerkelijk wachten tot ze aan de beurt zijn. Een deel van de klanten besluit voortijdig de verbinding te verbreken. Na zorgvuldige analyse blijkt dat klanten na een exponentieel verdeelde tijd met gemiddelde van α minuten besluiten de verbinding te verbreken.

b) Hoe luidt de stabiliteitsvoorwaarde voor dit systeem? $\lambda < 1\frac{1}{3}$

We zullen verder aannemen dat α=30 minuten. Het systeem is dan stabiel.

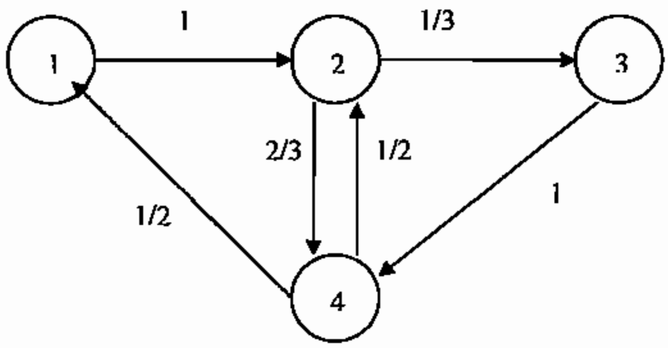
c) Teken het transitiediagram behorende bij dit call center, en beschrijf de door u gehanteerde toestanden, toestandsovergangen en overgangsintensiteiten.
d) Formuleer de evenwichtsvergelijkingen, en geef de evenwichtsverdeling.

U hebt bij onderdeel c) de evenwichtskansen bepaald. De volgende vragen mogen worden beantwoord in termen van de aankomstintensiteit, de gemiddelde bedieningsduur, het gemiddelde geduld α, en de evenwichtskansen P(i).

e) Bepaal het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij en in het systeem.
f) Wat is de gemiddelde wachttijd van een klant, en de gemiddelde verblijftijd van een klant in het systeem?
g) Hoeveel agents zijn er gemiddeld aan het werk?
h) Wat is de bezettingsgraad van het systeem?
i) Bepaal de gemiddelde lengte van een aaneengesloten periode waarin de agents niets te doen hebben.

8

Opgave 4 (20 punten)
Beschouw de Markov keten uit onderstaande figuur. De getallen langs de pijlen geven de overgangskansen tussen de vier toestanden.



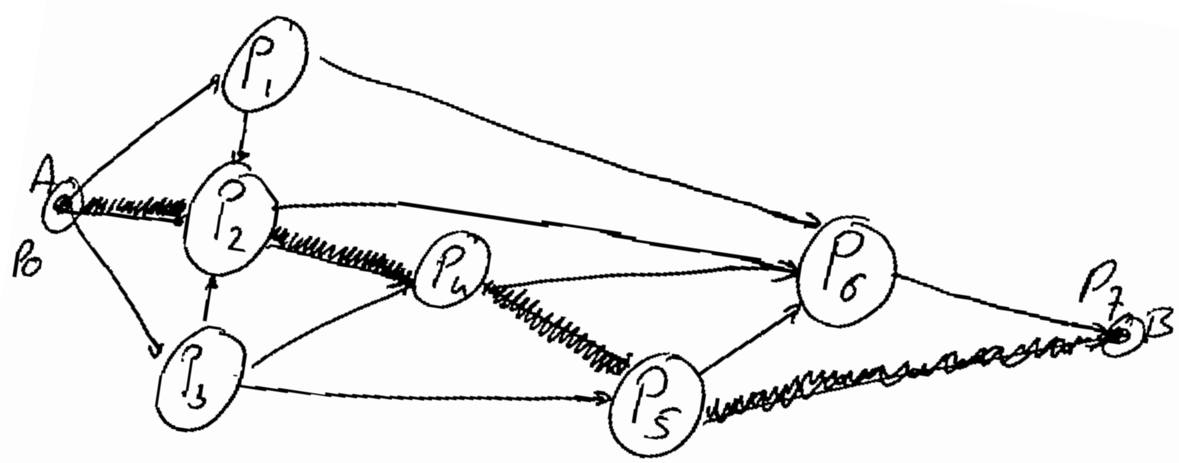
a) Bepaal de stationaire kansverdeling van deze Markov keten.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 4 te bereiken, en het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 4 voor het eerst toestand 1 te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als gesloten netwerk van wachtrijen. We spreken nu van stations in plaats van toestanden. Ieder station bezit één server, en iedere aankomende klant kan worden opgenomen in de wachtrij. Bediening is in volgorde van binnenkomst. De bedieningsduren bij de stations zijn exponentieel verdeeld, en de verwachte bedieningsduren in de vier stations zijn respectievelijk: $1/\mu_1=4$, $1/\mu_2=3$, $1/\mu_3=2$, $1/\mu_4=1$.

c) Bepaal m.b.v. Mean Value Analyse het verwachte aantal klanten en de verwachte verblijftijd in de vier stations voor m=1, en m=2.
d) Bepaal m.b.v. het algorithme van Buzen voor m=2 de kans dat er (n_1,n_2,n_3,n_4) klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations.
e) Wat is de bezettingsgraad van station 1 voor m=1 en voor m=2?

$1 \to 4$ $\quad m_{14} = 1 + p_{12} m_{24} = 1 + 1 \cdot \frac{2}{3}$

$4 \to 1$ $\quad m_{24} = 1 + p_{23} m_{34} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 1$ $\quad$ 3



* fase P_i staat voor pas i met $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

iedere pas heeft één toestand, namelijk hoogte h_i

$h_0 = 0$
$h_1 = 7$
$h_2 = 5$
$h_3 = 6$
$h_4 = 4$
$h_5 = 7$
$h_6 = 8$
$h_7 = 0$

$P_1 < \begin{matrix} P_6 \\ P_2 \end{matrix}$ $\quad P_4 < \begin{matrix} P_6 \\ P_5 \end{matrix}$ $\quad + \; P_0 < \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix}$

$P_2 < \begin{matrix} P_6 \\ P_4 \end{matrix}$ $\quad P_5 < \begin{matrix} P_6 \\ P_7 \end{matrix}$

$P_3 < \begin{matrix} P_5 \\ P_4 \\ P_2 \end{matrix}$ $\quad P_6 - P_7$.

* kiezen (beslissing) voor pas P_i met (minste) hoogte h_i

Recursie $V(i) = \min\limits_{d \in D(i)} \{ V(j) \; ; \; j \in S \quad \rightarrow \quad S_1 = \{P_6, P_2\}$ etc

$V(7) = \min\{h_7 = 0\} \quad [0]^*$

$V(6) = \min\{V(7) \quad [0]$

$V(5) = \min \begin{cases} V(6) & [8] \\ V(7) & [0]^* \end{cases}$

$(4) = \min \begin{cases} V(6) & [8] \\ V(5) & [7]^* \end{cases}$

$) = \min \begin{cases} V(5) & [7] \\ V(4) & [4]^* \\ V(3) & [6] \end{cases}$

$= \min \begin{cases} V(6) & [8] \\ V(4) & [4]^* \end{cases}$

$= \min \begin{cases} V(6) & [8] \\ V(2) & \boxed{5}^* \end{cases}$

$V(0) = \min \begin{cases} V(1) & [7] \\ V(2) & [5]^* \\ V(3) & [6] \end{cases}$

Check MIO.

Recursieve betrekking.

$f_n(i) = \min\limits_{d \in D_i(n)} \{ r(i,d) + f_{n+1}(i) \}$

Kenmerk: EWI06/TW/SOR/045/RB
Datum: 12 April 2006

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Donderdag 13 april 2006, 9:00 – 12:00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Eindcijfer = (aantal behaalde punten+10)/10.
Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

Opgave 1 (20 punten)
Een dumpzaak staat bekend om zijn bijzondere koopjes. De zaak heeft de gewoonte om de prijs van dag op dag te laten dalen, zodat een artikel snel verkocht wordt. Stel dat u op woensdag een artikel ziet (slechts één exemplaar aanwezig!) dat 30 Euro kost en dat u graag wilt kopen om uw vriend(in) zaterdag als kado te geven. U weet dat de prijs op donderdag gezakt is naar 25 Euro indien het woensdag niet verkocht wordt. Is het donderdag nog niet verkocht, dan is de prijs op vrijdag gezakt naar 10 Euro. U schat dat de kans dat het artikel er donderdag nog is, als u woensdag niet koopt, gelijk is aan 0.7. Als het er donderdag nog is en u donderdag niet koopt, is de kans 0.6 dat u het vrijdag nog kunt kopen. U weet zeker dat het zaterdag niet meer verkrijgbaar is. Als u uw koopbeslissing uitstelt tot donderdag of vrijdag en het artikel is reeds verkocht, koopt u een ander artikel van 40 Euro om zaterdag kado te geven.

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat zijn de fasen, toestanden, beslissingen, en de optimale waardefunctie?
b) Teken de beslisboom voor dit probleem.
c) Geef de recurrente betrekkingen voor de optimale waardefunctie.
d) Hoe groot is de minimale verwachte uitgave en welke optimale beslissing neemt u woensdag?

Opgave 2 (25 punten)
Iedere dag bezit u 0 of 1 aandeel van een fonds. De dagprijs voor dit aandeel is een stochastisch proces dat gemodelleerd wordt door een Markov keten met overgangskansen zoals in de tabel

		dag n+1	
		100	200
dag n	100	0.5	0.5
	200	0.25	0.75

Aan het begin van een dag waarop u een aandeel bezit kunt u kiezen tussen: verkopen tegen de geldende dagprijs of behouden. Als u aan het begin van een dag geen aandeel bezit, kunt u kiezen tussen het kopen van een aandeel tegen de geldende prijs of niet kopen. U heeft een startkapitaal van 200.

Uw doel is de verwachte contante waarde van de winst te maximaliseren over een oneindige horizon, bij een disconteringsfactor (op dagbasis) van 0.8.

a) Definieer de toestanden en geef per toestand de mogelijke beslissingen.
b) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen.
c) Voer twee iteraties uit van het Waarde-iteratie algoritme.
d) Formuleer een L.P.-model waarmee dit probleem opgelost kan worden. Beschrijf hoe in principe uit de oplossing van dit L.P.-model de optimale politiek gevonden wordt.
e) Kies zelf een stationaire politiek en onderzoek m.b.v. het strategie of politiek-iteratie algoritme (policy iteration) of de door u gekozen politiek optimaal is.
f) Hoeveel stationaire politieken zijn er? (Verklaar uw antwoord door gebruik te maken van de definitie van een stationaire politiek).

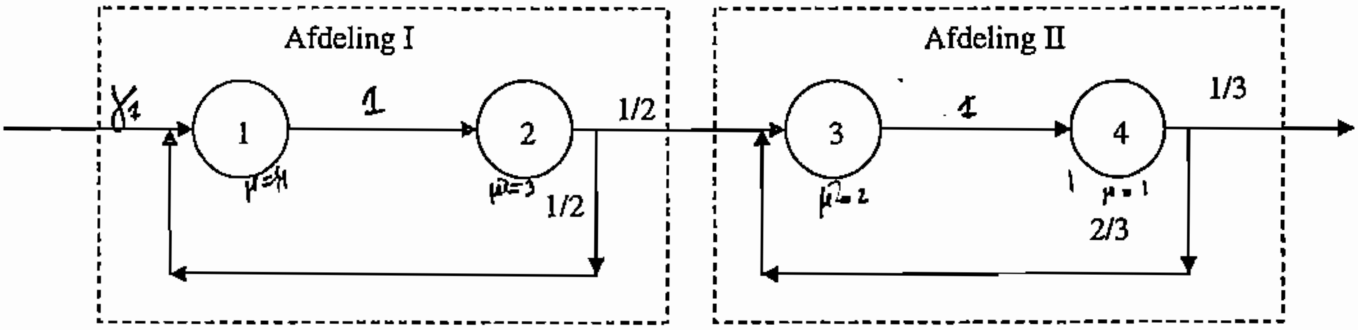
Opgave 3 (25 punten)
Bij een supermarkt arriveren klanten met een intensiteit van $\lambda = \frac{1}{2}$ per minuut. De supermarkt beschikt over twee kassa 's, die gebruik maken van een gezamenlijke wachtrij van klanten. Kassa 1 is altijd bemand. Kassa wordt pas geopend indien er drie of meer klanten in de wachtrij staan, en wordt pas weer gesloten indien de dienstdoende caissière zonder werk (lees: klanten) komt te zitten. De bedieningsduur van een klant bezit een exponentiele verdeling met een gemiddelde van $1/\mu = 1$ minuut.

a) Teken het transitiediagram behorende bij dit wachtsysteem, en beschrijf de door u gehanteerde toestanden, toestandsovergangen en overgangsintensiteiten (hint: definieer als toestanden (i, j) waarbij i staat voor het aantal klanten en j voor het aantal caissières).
b) Formuleer de evenwichtsvergelijkingen.

U heeft bij onderdeel b) de evenwichtskansen niet bepaald. De volgende vragen moeten worden beantwoord in termen van de aankomstintensiteit ς, de gemiddelde bedieningsduur $1/\Omega$, en de evenwichtskansen P(i,j).

c) Bepaal het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij.
d) Bepaal de gemiddelde wachttijd per klant.
c) Hoeveel caissières zijn er gemiddeld aan het werk?
f) Hoeveel procent van de tijd zijn alle kassa's bezet ?
g) Wat is de bezettingsgraad van kassa 2?
h) Bepaal de gemiddelde lengte van een aaneengesloten periode waarin kassa 1 niets te doen heeft.

Opgave 4 (20 punten)
Beschouw het open netwerk uit onderstaande figuur. Het wachtrijsysteem bestaat uit 4 wachtrijen, 1, 2, 3 en 4. Wachtrijen 1 en 2 vormen afdeling I, wachtrijen 3 en 4 vormen afdeling II. De getallen langs de pijlen geven de overgangskansen tussen de vier stations, dus een klant die vertrekt bij station 4 gaat met kans 2/3 naar station 3, en vertrekt uit het netwerk met kans 1/3. Ieder station bezit één server, en iedere aankomende klant kan worden opgenomen in de wachtrij. Bediening is in volgorde van binnenkomst. De verwachte bedieningsduren in de vier stations zijn respectievelijk: $1/\mu_1=1/4$, $1/\mu_2=1/3$, $1/\mu_3=1/2$, $1/\mu_4=1$. De aankomstintensiteit bij station 1 is γ_1.



a) Formuleer de stroomvergelijkingen en los deze op.
b) Hoe luidt de stationariteitsvoorwaarde?
c) Geef de kansverdeling van de rijlengten bij stations 1, 2, 3 en 4.
d) Geef de simultane verdeling (produktvorm) van de kansverdeling van de rijlengten bij de stations.
e) Geef voor ieder station een uitdrukking voor het gemiddelde aantal klanten, en voor de gemiddelde wachttijd van een klant.
f) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd van een klant in afdeling II.

— 1 9

Tentamen OR2 (1 maart '96)

fasen : t
toestand —
beslis koop, niet koop
opt waarde f..

5

Opgave 1. fasen $t = 1 = $ wo, $t = 2 = $ do, $t = 3 = $ vr

Definieer f_t = min verwachte prijs als op dag t het artikel nog beschikbaar is

opt waarde f..

5

$$f_t = \min \begin{cases} p_t & [\text{koop}] \\ q_{t+1} f_{t+1} + (1 - q_{t+1}) * 40 & [\text{N.K}] \end{cases}$$

[p_t prijs dag t]

q_t = kans dat op dag t het er nog is, gegeven dat er nog was op dag $t-1$ en niet gekocht.

$$f_3 = \min \begin{Bmatrix} 10 \\ 40 \end{Bmatrix} = 10 \quad [\text{kopen}].$$

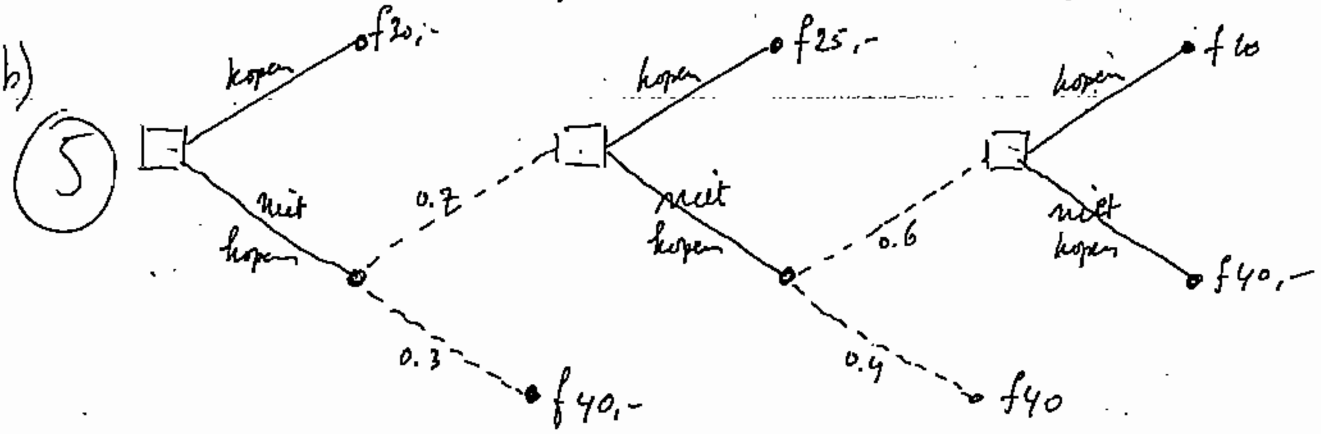
5

$$f_2 = \min \begin{cases} 25 \\ 0.6 f_3 + 0.4 * 40 = \underline{22} \end{cases} \quad [\text{niet kopen}]$$

$$f_1 = \min \begin{cases} 30 \\ 0.7 f_2 + 0.3 * 40 = 15.4 + 12 = \underline{27.4} \end{cases} \quad [\text{niet kopen}]$$

b)

5



(d) opt beslissing = niet kopen, verw min uitgave 27.4.

Mrt 2000

9 4

Opg 2

(a) Toestanden $\{(p,i)\}$ $\quad p \in \{100, 200\}$ en

$i = 0$ geen aandeel $i = 1$ wel

2

Als $i=0$ in (p,i) dan ~~wachten~~ niet kopen of kopen

" $i=1$ in (p,i) " behouden of verkopen

(b)
$$V(100,0) = \max \begin{cases} -100 + 0.8\left\{\frac{1}{2}V(100,1) + \frac{1}{2}V(200,1)\right\}^{70} & [k] \\ 0 + 0.8\left\{\frac{1}{2}V(100,0) + \frac{1}{2}V(200,0)\right\}^{80} & [N.k] \end{cases}$$

$$V(200,0) = \max \begin{cases} -200 + 0.8\left[\frac{1}{4}V(100,1) + \frac{3}{4}V(200,1)\right] & [k] \\ 0 + 0.8\left[\frac{1}{4}V(100,0) + \frac{3}{4}V(200,0)\right] & [N.k] \end{cases}$$

5
$$V(100,1) = \max \begin{cases} 100 + 0.8\left\{\frac{1}{2}V(100,0) + \frac{1}{2}V(200,0)\right\} & V \\ 0 + 0.8\left\{\frac{1}{2}V(100,1) + \frac{1}{2}V(200,1)\right\} & N.V \end{cases}$$

$$V(200,1) = \max \begin{cases} 200 + 0.8\left\{\frac{1}{4}V(100,0) + \frac{3}{4}V(200,0)\right\} & V \\ 0 + 0.8\left\{\frac{1}{4}V(100,1) + \frac{3}{4}V(200,1)\right\} & N.V \end{cases}$$

(c) $V_0(p,i) = 0 \quad \forall p, i$

5

$V_1(100,0) = 0$; $V_1(200,0) = 0$; ~~$V_1(100,1) = 100$~~ ; $V_1(200,1) = 200$

$$V_2(100,0) = \max \begin{Bmatrix} -100 + \frac{4}{5}\left\{\frac{1}{2}\cdot 100 + \frac{1}{2}\cdot 200\right\} = 20 \\ 0 + \frac{4}{5}\cdot 0 \end{Bmatrix} = 20$$

$$V_2(200,0) = \max \begin{Bmatrix} -200 + \frac{4}{5}\left\{\frac{1}{4}\cdot 100 + \frac{3}{4}\cdot 200\right\} = -60 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

200

V_π

Oplossing : $\left.\begin{array}{l} V_\pi(100,0) = 50 \\ V_\pi(100,1) = 150 \\ V_\pi(200,0) = 25 \\ V_\pi(200,1) = 225 \end{array}\right]$

Verbeter stap.

Toestand (100,0) :

$$T(100,0) = \max \left\{ \begin{array}{l} -100 + \frac{2}{5}(150+225) = 50 \\ 0 + \frac{2}{5}(25+50) = 30 \end{array} \right\} = 50 \quad [K]$$

dus $\delta_2(100,0) = \delta_1(100,0) = [K]$

Toestand (100,1) :

$$T(100,1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 100 + \frac{2}{5}(50+25) = 130 \\ \frac{2}{5}(150+225) = 150 \end{array} \right\} = 150 \quad [N.V]$$

dus $\delta_2(100,1) = \delta_1(100,1) = [N.V]$

Toestand (200,0) :

$$T(200,0) = \max \left\{ \begin{array}{l} -200 + \frac{1}{5}\cdot 150 + \frac{3}{5}\cdot 225 = -35 \\ \frac{1}{5}\cdot 50 + \frac{3}{5}\cdot 25 = 25 \end{array} \right\} = 25 \quad [N.K]$$

dus $\delta_2(200,0) = \delta_1(200,0) = [N.K]$

Toestand (200,1) :

$$T(200,1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 200 + \frac{1}{5}\cdot 50 + \frac{3}{5}\cdot 25 = 225 \\ \frac{1}{5}\cdot 150 + \frac{3}{5}\cdot 225 = 165 \end{array} \right\} = 225 \quad [V]$$

dus $\delta_2(200,1) = \delta_1(200,1) = [V]$.

mrt 2000 (9) 5

$$V_2(100,1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 100 + \frac{4}{5}\cdot 0 \\ 0 + \frac{4}{5}\left\{\frac{1}{2}\cdot 100 + \frac{1}{2}\cdot 200\right\} = 120 \end{array} \right\} = 120$$

$$V_2(200,1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 200 + \frac{4}{5}\cdot 0 \\ 0 + \frac{4}{5}\left\{\frac{1}{4}\cdot 100 + \frac{3}{4}\cdot 200\right\} = 140 \end{array} \right\} = 200$$

(d)

$$\min \sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq -100 + \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right] \\
x_1 &\geq \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right] \\
x_2 &\geq -200 + \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{3}{4}x_4\right] \\
x_2 &\geq \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{3}{4}x_2\right] \\
x_3 &\geq 100 + \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right] \\
x_3 &\geq + \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right] \\
x_4 &\geq 200 + \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{3}{4}x_2\right] \\
x_4 &\geq \tfrac{4}{5}\left[\tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{3}{4}x_4\right]
\end{aligned}$$

3

$\delta(1) = K$
$\delta(1) = NK$

2

constraints met '=' i- optimum geve optimale strategie

(Voor theorievraag zie dictaat OR 2)

(e) Politiek π: in (100, 0) kopen (K)
, (100, 1) niet verkopen (N.V)
, (200, 0) " kopen (N.K)
, (200, 1) verkopen (V)

Waardebepaling:

$$\begin{aligned}
V_\pi(100,0) &= -100 + \tfrac{2}{5}V_\pi(100,1) + \tfrac{2}{5}V_\pi(200,1) \\
V_\pi(100,1) &= \tfrac{2}{5}V_\pi(100,1) + \tfrac{2}{5}V_\pi(200,1) \\
V_\pi(200,0) &= \tfrac{1}{5}V_\pi(100,0) + \tfrac{3}{5}V_\pi(200,0) \\
V_\pi(200,1) &= 200 + \tfrac{1}{5}V_\pi(100,0) + \tfrac{3}{5}V_\pi(200,0)
\end{aligned}$$

(9) 6

(f) $\underline{\max} \sum_{i=0}^{3} V(i)$

$$a \left\{ V(0) = 0.95 \left\{ \tfrac{64}{125} V(0) + \tfrac{48}{125} V(1) + \tfrac{12}{125} V(2) + \tfrac{1}{125} V(3) \right\} \right.$$

$$b \left\{ \begin{array}{l} V(1) \leq 50 + 0.95 \left\{ \tfrac{16}{25} V(1) + \tfrac{8}{25} V(2) + \tfrac{1}{25} V(3) \right\} \\ V(1) \leq 75 + 0.95\, V(0) \end{array} \right.$$

$$c \left\{ \begin{array}{l} V(2) \leq 100 + 0.95 \left\{ \tfrac{4}{5} V(2) + \tfrac{1}{5} V(3) \right\} \\ V(2) \leq 175 + 0.95\, V(1) \\ V(2) \leq 200 + 0.95\, V(0) \end{array} \right.$$

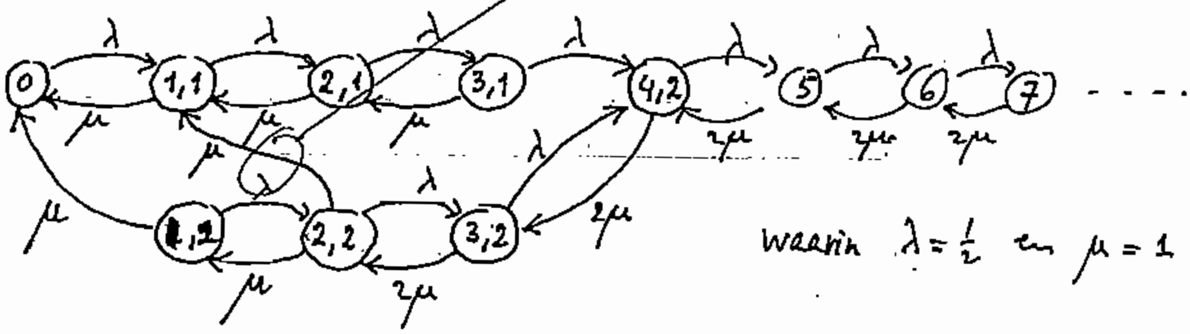
$$d \left\{ \begin{array}{l} V(3) \leq 150 + 0.95\, V(3) \\ V(3) \leq 225 + 0.95\, V(2) \\ V(3) \leq 250 + 0.95\, V(1) \\ V(3) \leq 275 + 0.95\, V(0) \end{array} \right.$$

(g) Voor iedere toestand $i \in S$ is er precies in respectievelijk a, b, c en d in de optimale oplossing een gelijkheid te vinden waar de betreffende optimale beslissing bij hoort.

verdund ✓

Opg. 3.

(a)



waarin $\lambda = \frac{1}{2}$ en $\mu = 1$

5

Opmerking: (1) toestand $(i,j) = (i)$ voor $i \geq 5$ (eigenlijk $i \geq 4$)

(2) de modelomschrijving is niet volledig: Bij een vertrek uit (2,2) kunnen twee toestanden ontstaan. Als kassa 1 het eerste klaar is moet kassa 2 kennelijk gesloten worden want kassa 1 heeft geen werk meer.

Dit betekent dat de klant in bediening bij kassa 2 naar kassa 1 overgaat; dit geeft een pijl met intensiteit μ van (2,2) naar (1,1). Is kassa 2 het eerste klaar dan moet deze open blijven omdat kassa 1 nog werk heeft. dus een overgang van (2,2) naar (1,2) met intensiteit μ

(b) De ~~evenwichtsvergelijkingen luiden~~

4

$$\lambda P_0 = \mu\,(P_{11} + P_{12})$$
$$(\lambda+\mu)P_{11} = \lambda P_0 + \mu\,(P_{21} + P_{22})$$
$$(\lambda+\mu)P_{12} = \mu P_{22}$$
$$(\lambda+\mu)_{21} = \lambda P_{11} + \mu P_{31}$$
$$(\lambda+2\mu)P_{22} = \lambda P_{12} + 2\mu P_{32}$$
$$(\lambda+\mu)P_{31} = \lambda P_{21}$$
$$(\lambda+2\mu)P_{32} = \lambda P_{22} + 2\mu P_{42}$$
$$(\lambda+2\mu)P_{42} = \lambda\,(P_{3,1} + P_{3,2}) + 2\mu P_{52}$$
$$(\lambda+2\mu)P_5 = \lambda P_{42} + 2\mu P_6$$
$$(\lambda+2\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + 2\mu P_{n+1} \quad , n \geq 6$$

$$P_0 + \sum_{i=1}^{3} P_{i1} + \sum_{i=1}^{4}{}' P_{i,2} + \sum_{n=5}^{\infty} P_n = 1$$ 1

De oplossing is veel rekenwerk en wordt achterwege gelaten.

3 (c) $0\,(P_{11}+P_{12}) + 1.\,(P_{21}+P_{32}) + 2\,(P_{31}+P_{42}) + \sum_{n=5}^{\infty}(n-2)P_n = EN_w$

3 (d) Toepassing formule v. Little : $\lambda EW = EN_W \Rightarrow EW = \frac{1}{\lambda} EN_w$

3 (e) $1.(P_0 + P_{11} + P_{21} + P_{31}) + 2.(P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42}) + 2\sum_{n=5}^{\infty} P_n$

3 (f) $\sum_{i=1}^{4} P_{i2} + \sum_{5}^{\infty} P_n$

2 (g) zie (f) 2 (h) wegens de geheugenloosheid Poisson proces : $\frac{1}{\lambda} = 2$ [min]

Omdat $\delta_2(p,i) = \delta_1(p,i)$ voor alle toestanden (p,i)

is politiek π optimaal.

(f) Er zijn 4 toestanden en in iedere toestand zijn 2 mogelijke beslissingen. Omdat in een stationaire politiek in iedere toestand steeds <u>dezelfde</u> beslissing wordt genomen is het aantal stationaire politieken $2^4 = \underline{16}$.

Opgave 4

a) Stroomvergelijkingen

2

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2$$
$$\lambda_2 = \lambda_1$$
$$\lambda_3 = \tfrac{1}{2}\lambda_2 + \tfrac{2}{3}\lambda_4$$
$$\lambda_4 = \lambda_3$$

oplossing

2

$$\lambda_1 = 2\gamma_1$$
$$\lambda_2 = 2\gamma_1$$
$$\lambda_3 = 3\gamma_1$$
$$\lambda_4 = 3\gamma_1$$

b) Stationariteit $\max\left\{\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{\lambda_4}{\mu_4}\right\} < 1$

4

$$\gamma_1 \max\left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, 3\right\} < 1$$

$$\Rightarrow \gamma_1 < \tfrac{1}{3}$$

3 c) $\pi_i(n_i) = (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}$ $\quad (\rho_i = \lambda_i/\mu_i)$ $\quad n_i \geq 0$

3 d) $\pi(n_1, n_2, n_3, n_4) = \pi_1(n_1) \cdots \pi_4(n_4)$ $\quad \vec{n} \geq 0$

3 e) $\mathbb{E}N_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$ $\quad \mathbb{E}W_i = \frac{\mathbb{E}N_i}{\lambda_i}$

3 f) $\mathbb{E}N^{(2)} = \mathbb{E}N_3 + \mathbb{E}N_4$

$$\mathbb{E}F^{(2)} = \frac{\mathbb{E}N^{(2)}}{\gamma_1}$$

Opgave 1

a) woe → 30

do → 25 beschikbaar 0,7 0,3 → 40

vr → 10 " 0,6 0,4 → 40

za → 40 " 1,0

fasen n = dagen → n = 1 woe

n = 2 do

n = 3 vr

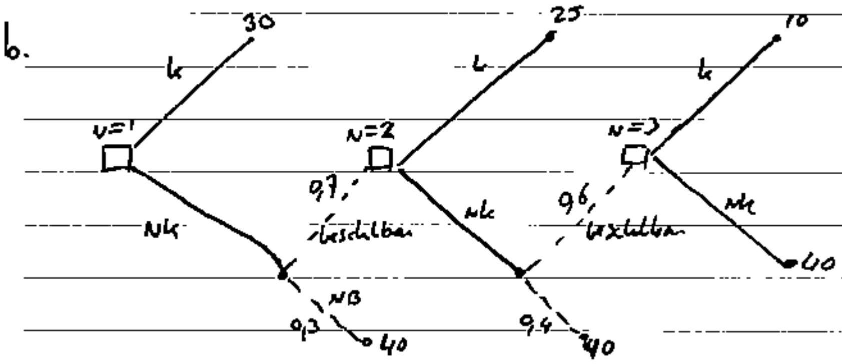
~~N=4 ZA~~.

toestand i = prijs cadeau 30, 25, 10, 40.

beslissing d = kopen / niet kopen.

$$f_n^{prijs}(K) = \begin{cases} X & [k] \\ \underbrace{q_{n+1} \times f_{n+1}}_{\text{kans beschikbaar} \times \text{prijs in toestand fase } n+1} + \underbrace{(1 - q_{n+1}) \times 40}_{\text{kans niet beschikbaar} \times \text{prijs [illegible] als al verkocht}} & [Nk] \end{cases}$$

b.



c. $$f_3^{MIN}(\cdot) = \begin{cases} 10 & [k]^* \\ 40 & [Nk] \end{cases}$$

d. min verwachte uitgave = 27,4. woensdag → niet kopen

(9)

c/d. $f_{2\,min} \begin{cases} 25 & [k] \\ 0{,}6\times10 + 0{,}4\times40 = 22 & [Nk]^* \end{cases}$

$f_{1\,min} \begin{cases} 30 \\ 0{,}7\times22 + 0{,}3\times40 = \underline{\underline{27{,}4}} & [Nk]^* \end{cases}$

ExxonMobil

Opgave 2

verkopen/kopen verkopen/kopen.

a) Prijs $p = 100$ of 200 keuze uit kopen of verkopen voor p

b)

Toestand $i = 1$ aandeel in bezit $\boxed{\alpha = 0{,}8}$

$i = 0$ aandeel niet in bezit.

j = prijs aandeel met $j \in S\{100, 200\}$

Optimaliteitsverg. $V(i) = \max_{j \in D_i} \{ r(i,j) + \alpha \sum_{j \in S} p(j \mid i,d) V_j \}$ $i \in S$

$$V(1,100) = \max \begin{cases} \text{verkopen} & 100 + 0{,}8\{0{,}5 \cdot V(0,100) + 0{,}5\, V(0,200)\} \\ \text{behouden} & 0 + 0{,}8\{0{,}5\, V(1,200) + 0{,}5\, V(1,100)\} \end{cases}$$

$$V(1,200) = \max \begin{cases} \text{verkopen} & 200 + 0{,}8(0{,}25 \cdot V(0,100) + 0{,}75\, V(0,200)) \\ \text{behouden.} & 0 + 0{,}8(0{,}25\, V(1,100) + 0{,}75\, V(1,200)) \end{cases}$$

$$V(0,100) = \max \begin{cases} \text{kopen} & -100 + 0{,}8 \cdot (0{,}5 \cdot V(1,100) + 0{,}5 \cdot V(1,200)) \\ \text{niet kopen} & 0 + 0{,}8\,(0{,}5\, V(0,100) + 0{,}5\, V(0,200)) \end{cases}$$

$$V(0,200) = \max \begin{cases} \text{kopen} & -200 + 0{,}8\,(0{,}75\, V(1,200) + 0{,}25\, V(1,100)) \\ \text{niet kopen} & 0 + 0{,}8\,(0{,}75\, V(0,200) + 0{,}25\, V(0,100)). \end{cases}$$

c) Initialisatie $n = 1$ $V(i) = \max_{d \in D(i)} \{ r(i,d) \}$

Iteratie $n = n + 1$

$\cancel{V_0} = V_0(i,p) = 0 \quad \forall\; p, i$ (→ voor elke)

$(1,200)$	$\delta(1) = 1$	200
$(0,200)$	$\delta(0) = 0$	0
$(1,100)$	$\delta(1) = 0$	120
$(0,100)$	$\delta(0) = 1$	20

$V_1(0,100) = 0$.

$V_1(1,100) = 100$.

$V_1(0,200) = 0$.

$V_1(1,200) = 200$.

$$V_2(0,100) = \begin{cases} -100 + 0{,}8((0{,}5 \cdot 100) + (0{,}5 \cdot 200)) = 20^* \\ 0 + 0{,}8((0{,}5 \cdot 0) + (0{,}5 \cdot 0)) = 0 \end{cases}$$

$20 - 120 - 0 - 200.$

$$V_2(1,100) = \begin{cases} 100 + 0{,}8((0{,}5 \cdot 0) + (0{,}5 \cdot 0)) = 100 \\ 0 + 0{,}8((0{,}5 \cdot 200) + (0{,}5 \cdot 100)) = 120^* \end{cases}$$

$$V_2(0,200) = \begin{cases} -200 + 0{,}8(0{,}75 \cdot 200) + 0{,}25 \cdot 100 = -60. \\ 0 + 0{,}8(0{,}75 \cdot 0) + 0{,}25 \cdot 0) = 0^* \end{cases}$$

$$V_2(1,200) = \begin{cases} 200 + 0{,}8((0{,}25 \cdot 0) + (0{,}75 \cdot 0)) = 200^* \\ 0 + 0{,}8((0{,}25 \cdot 200) + (0{,}75 \cdot 200)) = 140 \end{cases}$$

d.) ~~MAX~~ MIN. $\sum_i X_i$

$X_1 = (0,100)$ $\delta(0) = 1$
$X_2 = (1,100)$ $\delta(1) = 0$
$X_3 = (0,200)$ $\delta(0) = 0$
$X_4 = (1,200)$ $\delta(1) = 1$

stationaire policy uit c afgeleid; optimaal? zie e.

2.d.d

$^{*}X_1 \geq -100 + 0{,}8(0{,}5X_2 + 0{,}5X_4)$ $\quad \delta_1(0) = 1$ kopen.
$X_1 \geq 0 + 0{,}8(0{,}5X_1 + 0{,}5X_3)$ $\quad \delta_1(0) = 0$ niet kopen
$X_2 \geq 100 + 0{,}8(0{,}5X_1 + 0{,}5X_3)$ $\quad \delta_1(1) = 1$ verkopen
$^{*}X_2 \geq 0 + 0{,}8(0{,}5X_4 + 0{,}5X_2)$ $\quad \delta_1(1) = 0$ behouden
$X_3 \geq -200 + 0{,}8(0{,}75X_4 + 0{,}25X_2)$
$^{*}X_3 \geq 0 + 0{,}8(0{,}75X_3 + 0{,}25X_1)$
$^{*}X_4 \geq 200 + 0{,}8(0{,}25X_1 + 0{,}75X_3)$
$X_4 \geq 0 + 0{,}8(0{,}25X_4 + 0{,}75X_4)$

e. Stat policy uit d. optimaal → met policy iteration.

① $V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{5}V_\pi(1,100) + \frac{2}{5}V_\pi(1,200)$
② $V_\pi(1,100) = \frac{2}{5}V_\pi(1,200) + \frac{2}{5}V_\pi(1,100)$
③ $V_\pi(0,200) = \frac{3}{5}V_\pi(0,200) + \frac{1}{5}V_\pi(0,100)$
④ $V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{5}V_\pi(0,100) + \frac{3}{5}V_\pi(0,200)$

① ~~(4)~~) $\frac{3}{5}V_\pi(1,100) = \frac{2}{5}V_\pi(1,200) \Rightarrow V_\pi(1,100) = \frac{2}{3}V_\pi(1,200)$

~~$V_\pi(1,200) = \frac{3}{2}V_\pi(1,100)$~~

$V_\pi(0,100) = -100 + \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)V_\pi(1,200) + \frac{2}{5}V_\pi(1,200) \Rightarrow \underline{V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{3}V_{200,1}}$

②) $V_\pi(1,100) = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)$ ~~$V_\pi(1,100) + \frac{2}{5}V_\pi(1,100) \Rightarrow V_\pi(1,100) = \frac{2}{5}V_\pi(1,200) + \frac{4}{15}V_\pi(1,200) =$~~

$\hookrightarrow \frac{3}{5}V_\pi(1,100) = \frac{2}{5}V_\pi(1,200) \Rightarrow \underline{V_\pi(1,100) = \frac{2}{3}V_\pi(1,200)}$

③) $\frac{2}{5}V_\pi(0,200) = \frac{1}{5}V_\pi(0,100) \Rightarrow \underline{V_\pi(0,200) = \frac{1}{2}V_\pi(0,100)}$

④) $V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{5}V_\pi(0,100) + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}V_\pi(0,100)\right)$

$\underline{V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{2}V_\pi(0,100)}$

9

$V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{3} V_\pi(1,200)$ Ⓐ

$V_\pi(1,100) = \frac{2}{3} V_\pi(1,200)$ Ⓑ

$V_\pi(0,200) = \frac{1}{2} V_\pi(0,100)$ Ⓒ

$V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{2} V_\pi(0,100)$ Ⓓ

Ⓓ vul in bij Ⓐ

$$V_\pi(0,100) = -100 + \frac{2}{3}\left(200 + \frac{1}{2} V_\pi(0,100)\right)$$
$$= -100 + 133\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3} V_\pi(0,100)$$
$$= 33\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3} V_\pi(\cancel{1,200}\ 0,100)$$
$$\frac{2}{3} V_\pi(0,100) = 33\tfrac{1}{3}$$
$$V_\pi(\cancel{1,200}\ 0,100) = 50$$

→ vul in bij Ⓑ / Ⓒ / Ⓓ.

$$V_\pi(1,100) = \frac{2}{3}\left(200 + \frac{1}{2} \cdot 50\right) = 150$$
$$V_\pi(0,200) = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$
$$V_\pi(1,200) = 200 + \frac{1}{2} \cdot 50 = 225$$

Verbeterstap. $T_\delta(i) = \max_{d \in D_i} \left\{ R(i,d) + \beta \sum_{j \in S} p(j \mid i,d) V_\delta(j) \right\}$

$$T_\delta(0,100) = \max \begin{cases} -100 + 0{,}8(0{,}5 \times 150 + 0{,}5 \times 225) = 50^* \\ 0 + 0{,}8(0{,}5 \times 50 + 0{,}5 \times 25) = 30 \end{cases}$$

→ kopen. $\delta_1(0,100) = \delta_2(0,100)$

$$T_\delta(1,100) = \max \begin{cases} 100 + 0{,}8(0{,}5 \times 50 + 0{,}5 \times \cancel{50}\ 25) = 130 \\ 0{,}8(0{,}5 \times 225 + 0{,}5 \times 150) = 150^* \end{cases}$$

→ Niet verkopen. $\delta_1(1,100) = \delta_2(1,100)$

$$T_\delta(0,200) = \max \begin{cases} -200 + 0{,}8(0{,}75 \times 225 + 0{,}25 \times 50) = -35 \\ 0{,}8(0{,}75 \times 25 + 0{,}25 \times 50) = 25^* \end{cases}$$

→ niet kopen. $\delta_1(0,200) = \delta_2(0,200)$

$$T_\delta(1,200) = \max \begin{cases} 200 + 0{,}8(0{,}75 \times 50 + 0{,}75 \times 25) = 225^* \\ 0{,}8(0{,}25 \times \cancel{150}\ 50 + 0{,}75 \times 225) = 165 \end{cases}$$

→ verkopen. $\delta_1(1,200) = \delta_2(1,200)$

Dus $\delta_1 = \delta_2$ dus optimaal. → (kopen / niet verkopen / niet kopen / verkopen)

f.) 4 toestanden en in iedere toestand zijn 2 mogelijke beslissingen.
Omdat in een stationaire politiek in iedere toestand steeds
dezelfde beslissing wordt genomen is het aantal politieken gelijk
aan $2^4 = 16$

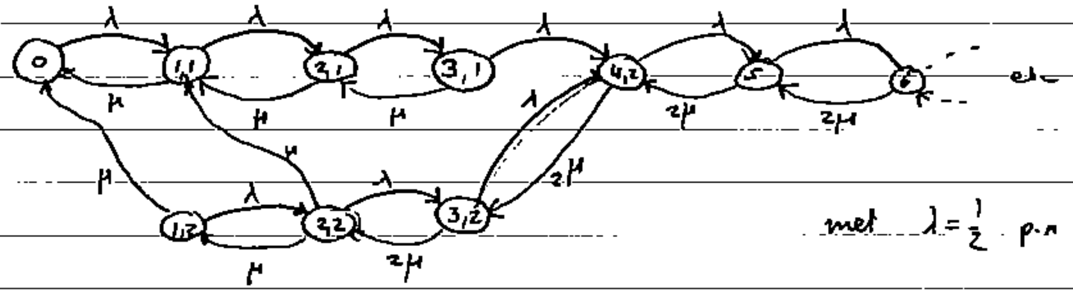
Dus 16 mogelijke politieken maar niet allemaal optimaal

Iedere optimale politiek = stationaire politiek? ja

(9)

Opgave 3

a)



met $\lambda = \frac{1}{2}$ p.n en $\mu = 1$ p.n

toestand (i,j) met i = # klanten, j = # (kassa's) toestand $(i,j) = (i)$ voor $i \geq 5$

toelichting: bij vertrek uit 2,2 twee toestanden.
1) kassa 1 eerste klaar → geen werk, dus gelijk sluiten
kassa 2 huidige klant kassa 2 → 1
2) kassa 2 eerste klaar → kassa 2 blijft open omdat kassa 1 nog werk heeft

b.
$$\lambda P_0 = \mu (P_{11} + P_{12})$$
$$(\lambda+\mu) P_{11} = \lambda P_0 + \mu (P_{21} + P_{22})$$
$$(\lambda+\mu) P_{12} = \mu P_{22}$$
$$(\lambda+\mu) P_{21} = \lambda P_{11} + \mu P_{31}$$
$$(\lambda+2\mu) P_{22} = \lambda P_{12} + 2\mu P_{32}$$
$$(\lambda+\mu) P_{31} = \lambda P_{21}$$
$$(\lambda+2\mu) P_{32} = \lambda P_{22} + 2\mu P_{42}$$
$$(\lambda+2\mu) P_{42} = \lambda (P_{31} + P_{32}) + 2\mu P_{52}$$
$$(\lambda+2\mu) P_5 = \lambda P_{42} + 2\mu P_6$$
$$(\lambda+2\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + 2\mu P_{n+1} \quad , n \geq 6$$

$$P_0 + \sum_{i=1}^{3} P_{i1} + \sum_{i=1}^{4} P_{i,2} + \sum_{n=5}^{\infty} P_n = 1$$

c. $E(N_w) = 0(P_0 + P_{11}) + 1(P_{21} + P_{32}) + 2(P_{31} + P_{42}) + \sum_{n=5}^{\infty} (n-2) P_n$

d. Little = $E(N_w) = \lambda EW \Rightarrow EW = \frac{1}{\lambda} E N_w$

e) $1.(P_{6} + P_{11} + P_{21} + P_{31}) + 2(P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42}) + 2\sum_{n=5}^{\infty} P_n$

f) $\sum_{i=1}^{4} P_{i2} + \sum_{5}^{\infty} P_n$

g) idem als f

h) Geheugenloosheid Poisson proces ⇒ gelijk aan tussenaankomsttijden ⇒ $\frac{1}{\lambda}$ dus $\frac{1}{1/2} = 2$ MIN

ExxonMobil

Opgave 4

a) γ_i $\quad 1 P_1 = \frac{1}{2} P_2 + \gamma_1 \Rightarrow P_1 = 2\gamma_1$ $\quad \mu_1 = 4,\ \mu_2 = 3,\ \mu_3 = 2$

$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) P_2 = P_1 \Rightarrow P_2 = 2\gamma_1$ $\quad \mu_4 = 1$

$1 P_3 = \frac{1}{2} P_2 + \frac{2}{3} P_4 \Rightarrow P_3 = \gamma_1 + \frac{2}{3} P_4$

$(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}) P_4 = P_3 \Rightarrow P_4 = P_3$

$\left.\right\}$ $P_3 = P_4 = 3\gamma_1$

$$\left[P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Rightarrow 2\gamma_1 + 2\gamma_1 + 3\gamma_1 + 3\gamma_1 = 1 \Rightarrow 10\gamma_1 = 1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{1}{10} \right]$$

b.) $\rho < 1$ dus $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

↳ voor deze situatie: $\frac{2\gamma_1}{\mu_1} \Rightarrow \frac{2 \cdot \gamma_1}{4} < 1$

$\gamma_1 < 2$ zo geldt ook $\gamma_1 < 1,5$; $\gamma_1 < \frac{2}{3}$; $\gamma_1 < \frac{1}{3}$

c) $P(k_1; k_2, k_3, k_4) = \prod_{i=1}^{4} P_i(k_i)$

$P_i(k_i) = (1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i})(\frac{\lambda_i}{\mu_i})^{k_i}$ $\quad k_i = 0, 1, 2, 3, 4,$ mits voldaan aan $\frac{\lambda_i}{k_i} < 1$

d) $\prod_{i=1}^{4} P_i(k_i) = (1 - \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{4})(\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{4})^{k_i} * (1 - \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{3})(\frac{2\frac{1}{3}}{3})^{k_i} * (1 - \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{2})(\frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{2})^{k_i} * (1 - \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{1})(\frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{1})^{k_i}$

$\gamma < \frac{1}{3}$ niet $\gamma = \frac{1}{3}$ $\quad \rho_i(n_i) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i}\ \forall i \Rightarrow \Pi_i\ \rho_i(n_i)$

↳ $\gamma = \frac{1}{10}$

e) $EN_w = EW \cdot \lambda$ $\quad$ (of $EN = EF \cdot \lambda$ zie f)

v. voor elke i

$EN_{...} = EN_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$ met $i = 1, 2, 3, 4$ (# klanten in systeem)

$EW_i = EN_i - \frac{1}{\lambda_i}$ (Gem wachttijd v. een klant.

f) $EN_{afd 2} = EN_3 + EN_4$ $\quad EF = \frac{EN_{afd 2}}{\lambda_1}$

↳ γ_1

$\cancel{\gamma_1}\ \gamma_1$

aantal binnenkomende γ_1 ... EN

delen door.

γ_1 in $\rightarrow \gamma_1$ uit

16

FACULTEIT BEDRIJF, BESTUUR en TECHNOLOGIE
Kenmerk: OMPL05.030/lw
Datum: 10 juni 2005

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Dinsdag 14 juni 2005, 13.30-16.30 uur

Opmerkingen vooraf:

1. Gelieve (voor de cijferregistratie) het blok **bovenaan** het antwoordformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, **grafische rekenmachines** of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

Opgave 1 (7 punten)

Een student die weinig slaap nodig heeft, moet het volgende kwartiel voor zijn afstuderen nog 3 lastige vakken afronden, zeg A, B en C. Hij heeft een inschatting gemaakt van de kansen dat hij een bepaald vak zal halen als functie van de tijd die hij er in investeert. Naast zijn werk bij Stress en AH en zijn sociale verplichtingen heeft de student per week toch nog 5 dagen beschikbaar voor studie. Hij kan aan een vak wekelijks 0, 1,..., 5 dagen besteden. Neem aan dat het aantal dagen dat hij aan een bepaald vak besteedt van week tot week hetzelfde is (dus bijvoorbeeld: hij besteedt een kwartiel lang 2 dagen aan vak A elke week). De slaagkansen voor een bepaald vak bij de verschillende niveau's van inspanning staan in de volgende tabel:

Aantal dagen	Slaagkans A	Slaagkans B	Slaagkans C	
0	.20	.25	.10	0,55
1	.40	.50	.30	1,20
2	.60	.60	.45	1,65
3	.75	.70	.55	2,0
4	.80	.75	.65	2,2
5	.85	.80	.70	2,35

De student wil zijn tijd zodanig over de vakken verdelen dat de kans dat hij geen enkel vak haalt zo klein mogelijk is.
Los dit probleem op met stochastische dynamische programmering.
Hint
Kies: Fase t = vak t (t=1=A, t=2=B, t=3=C)

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat kies je, bij bovenstaande keuze voor de fasen, als:
   - toestanden
   - beslissingen
   - optimale-waardefunctie.

b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waardefunctie.

c) Los het probleem op via dynamische programmering. (Er hoeft geen *policy table* gegeven te worden.)

Opgave 2 (10 punten)

In een magazijn wordt van een bepaald artikel een kleine voorraad aangehouden van maximaal 2 stuks. Aan het eind van elke week wordt de voorraad geteld en wordt beslist of er bijbesteld moet worden en zo ja, hoeveel stuks. De bestelling wordt onmiddellijk afgeleverd. De kosten van een bestelling bestaan uit een vast bedrag van 80, vermeerderd met 80 per bestelde eenheid. De vraag per week is stochastisch en wel 0 met kans ¼, 1 met kans ½ en 2 met kans ¼. Indien de vraag groter is dan de voorraad wordt het tekort direct door de fabriek nageleverd. Dit kost 240 per eenheid. De voorraadkosten zijn 0 onafhankelijk van de voorraadhoogte. De beginvoorraad is 0.
Men vraagt zich af wat een optimale voorraad- en bestelstrategie is die de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. Het bedrijf hanteert een verdisconteringsfactor van 0.8 per week.

a) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe kosten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.

b) Formuleer de optimaliteitsvergelijking voor de optimale-waardefunctie V(i).

c) Voer twee slagen uit van het successieve-approximatie (*value iteration*) algoritme, d.w.z. bepaal $V_1(i)$ en $V_2(i)$, uitgaande van $V_0(i) = 0$. Bepaal in elke stap de bijbehorende kandidaat-strategie.

d) Wat zijn de verwachte verdisconteerde kosten vanuit beginvoorraad 0 bij gebruik van de strategie (2,0,0), d.w.z. 2 bestellen bij voorraad 0 en bij andere beginvoorraden niets bestellen?

e) Welke stappen zijn nodig om via *policy iteration* te bepalen of de strategie uit d) optimaal is? (Je hoeft deze stappen niet door te rekenen.)

V 6

Opgave 3 (12 punten)

zie ook klaas. NU 2 servers

Het werkcollege SMOM vindt plaats in een grote collegezaal. Voor het beantwoorden van vragen zijn de docent (Leo) en zijn studentassistente Gwendolyn aanwezig. De tijd tussen 2 tijdstippen waarop een student(e) te kennen geeft graag hulp te hebben door zijn of haar vinger op te steken, is negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten.
Als er vier studenten zijn met een vraag (twee die geholpen worden en twee die op hulp wachten), dan zien andere studenten af van het vragen om hulp. Het beantwoorden van een vraag door Leo respectievelijk Gwendolyn vergt een negatief exponentieel verdeelde

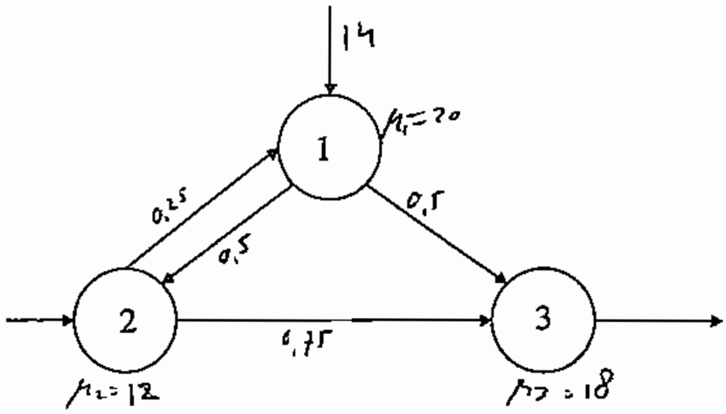
tijdsduur met een gemiddelde van 2 respectievelijk 4 minuten. Indien Leo en Gwendolyn beide niet bezig zijn met het beantwoorden van vragen, dan worden de eerst binnenkomende vragen op fifty-fifty-basis verdeeld tussen hen.

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen.

De antwoorden op de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in de evenwichtskansen uit onderdeel b).

c) Hoeveel minuten moet een student(e) gemiddeld wachten tot Leo of Gwendolyn tijd heeft om de vraag te beantwoorden?
d) Hoeveel studenten per uur zien naar verwachting af van het stellen van een vraag?
e) Welke fractie van de tijd is Gwendolyn gemiddeld bezig met het beantwoorden van vragen?
f) Hoeveel vragen beantwoordt Leo gemiddeld per uur?
g) Wat is de gemiddelde lengte van een periode waarin Leo continu vragen beantwoordt?

Opgave 4 (7 punten)
Beschouw het onderstaande open wachtrijnetwerk met negatief exponentieel verdeelde bewerkingstijden en Poisson-aankomstprocessen bij station 1 en 2.



De aankomstintensiteit bij station 1 is 14 jobs per uur. Neem aan voorlopig (in onderdeel a) t/m d)) dat er bij station 2 geen jobs binnenkomen. De overgangskansen zijn als volgt: $r_{12} = r_{13} = 0.5$, $r_{21} = 0.25$, $r_{23} = 0.75$. Het gemiddelde aantal jobs dat bewerkt kan worden per uur bij stations 1, 2 en 3 bedraagt respectievelijk 20, 12 en 18 jobs.

a) Geef de stroomvergelijkingen en los deze op. Laat zien dat aan de stationariteitsvoorwaarde is voldaan.
b) Geef de kansverdeling van de wachtrijlengte bij station 3.

c) Wat is de bezettingsgraad van station 2?
d) Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job in het systeem?
e) Veronderstel nu dat er ook jobs bij station 2 het netwerk binnenkomen en wel met intensiteit r_2 jobs per uur. Becommentarieer de volgende stelling: "De minimale waarde van r_2 waarvoor niet meer aan de stationariteitsvoorwaarde is voldaan is $r_2 = 4$ jobs per uur".

Opgave 1

a.
SDP probleem:
Fasen n: N={1=A, 2=B, 3=C}
Toestanden i: resterende dagen voor fase n en verder S={0,1,2,3,4,5}
Beslissingen d: hoeveel dagen besteden aan vak n, $D_n(i)=\{x \mid 0 \le x \le i\}$
Optimale waardefunctie: minimaal verwachte kans op geen gehaald vak voor vakken n en i resterende dagen.

b.
$$V_n(i) = \min_{d_n \in D_n} \{r_n(d_n) * V_{N+1}(i - d_n)\}$$
$D_n(i)=\{x \mid 0 \le x \le i\}$ (in toestand i kan je nog 0-i dagen besteden aan vakken n, n+1,..., N).

In de laatste fase (fase 3/Vak C) besteed je alle resterende tijd:

V3(0)=.90	V3(2)=.55	V3(4)=.35
V3(1)=.70	V3(3)=.45	V3(5)=.30

Directe opbrengst:
$r_n(d_n)$ = faalkans = 1-slaagkans voor vak n met d_n dagen besteed (uitlezen uit de tabel uit de opgave).

Alle kansen zijn dus: 1 – slaagkans. Een ander manier van oplossen is de slaagkans maximaliseren. (Hier wordt de faalkans geminimaliseerd!).

c.

$V_n(i)$	Vak A = 1	Vak B = 2	Vak C = 3
I=0	x	.675 (d=0)	.90
I=1	x	.450 (d=1)	.70
I=2	x	.350 (d=1)	.55
I=3	x	.270 (d=3)	.45
I=4	x	.210 (d=3)	.35
I=5	.0875 (d=3)	.165 (d=3)	.30

Tabel verder invullen:

V2(5)=min{ d=0: .75*.30=.225
d=1: .50*.35=.175
d=2: .40*.45=.180
d=3: .30*.55=.165*
d=4: .25*.70=.175
d=5: .20*.90=.180
V2(4)=min{ d=0: .75*.35=.2625
d=1: .50*.45=.225
d=2: .40*.55=.220
d=3: .30*.70=.210*
d=4: .25*.90=.225
V2(3)=min{ d=0: .75*.45=.3375
d=1: .50*.55=.275
d=2: .40*.70=.280
d=3: .30*.90=.270*
V2(2)=min{ d=0: .75*.55=.4125
d=1: .50*.70=.350*
d=2: .40*.90=.360
V2(1)=min{ d=0: .75*.70=.5250
d=1: .50*.90=.450*
V2(0)=min{ d=0: .75*.90=.6750*

V1(5)=min{ d=0: .80*.165=.1320
d=1: .60*.210=.1260
d=2: .40*.270=.1080
d=3: .25*.350=.0875*
d=4: .20*.450=.090
d=5: .15*.675=.1013

Dus: besteed 3 dagen aan vak A, 1 aan vak B en 1 aan vak C. De kans dat je geen enkel vak haalt is dan 8,75%.

(10)

Opgave 2

a. MDP

Toestanden i: voorraad begin van de week S={0,1,2}

Beslissingen d: bestelling D_0={0,1,2}, D_1={0,1}, D_2={0}

Directe kosten: r(i,d)

Overgangskansen: p(j|i,d)

				p(j|i,d)		
i	D	Nabestelling	r(i,d) = best. Kost+kosten nabest.	J=0	J=1	J=2
0	0	0,1,2	0 + ¼*0+½*240+¼*240 = 180	1	0	0
0	1	0,1	80+1*80 + ½*0+¼*240 = 220	¾	¼	0
0	2	0	80+2*80 + 0 = 240	¼	½	¼
1	0	0,1	0 + ½*0+¼*240 = 60	¾	¼	0
1	1	0	80+1*80 + 0 = 160	¼	½	¼
2	0	0	0 + 0 = 0	¼	½	¼

b. Optimale waarde functie: $V(i) = \min_{d \in Di}\left\{r(i,d) + \beta \sum_{j \in S} p(j \mid i,d) V(j)\right\}$

Uitwerken:

V(0)=min{ d=0: 180+0,8V(0)
d=1: 220+0,6V(0)+0,2V(1)
d=2: 240+0,2V(0)+0,4V(1)+0,2V(2)
V(1)=min{ d=0: 60+0,6V(0)+0,2V(1)
d=1: 160+0,2V(0)+0,4V(1)+0,2V(2)
V(2)= d=0: 0+0,2V(0)+0,4V(1)+0,2V(2)

c.

V1(0)=min{ d=0: 180 *
d=1: 220
d=2: 240
V1(1)=min{ d=0: 60 *
d=1: 160
V1(2)= d=0: 0 *

Er wordt niets besteld in V1(i).

V2(0)=min{ d=0: 180+0,8*(1*180)=324
d=1: 220+0,8*(3/4*180+1/4*60)=340
d=2: 240+0,8*(1/4*180+1/2*60+1/4*0)=300*
V2(1)=min{ d=0: 60+0,8*(3/4*180+1/4*60)=180*
d=1: 160+0,8*(1/4*180+1/2*60+1/4*0)=220
V2(2)=min{ d=0: 0+0,8*(1/4*180+1/2*60+1/4*0)=60*

Bestel er 2 bij voorraad 0 anders bestel niets.

d. Doe een stuk policy iteration totdat je Vδ(0) kan bereken met δ={2,0,0}
Dus stelsel van vergelijkingen Vδ(i) opstellen en oplossen.

Vδ(0)=240 + 0,8 * (¼Vδ(0)+½ Vδ(1)+¼ Vδ(2))
Vδ(1)=60 + 0,8 * (¾Vδ(0)+¼ Vδ(1))
Vδ(2)=0 + 0,8 * ((¼Vδ(0)+½ Vδ(1)+¼ Vδ(2))=Vδ(0)-240

.8Vδ(1)=60 + 0,6Vδ(0)
Vδ(0)=240 + 0,2Vδ(0) + 30+0,3Vδ(0) + 0,20Vδ(0)-48=740

Oplossen levert:
Vδ(0)=740

e. Policy iteration.

1 Kies policy δ
Bepaal Vδ(i)=
Los dit stelsel op
2 Politiek verbetering:
Bereken Tδ(i)= voor alle i uit S
Als voor 1 politiek geldt: Tδ(i)<Vδ(i) (kleiner dan vanwege minimalisatie) dan politiek niet optimaal. Kies nieuwe politiek δ' met voor iedere i beslissing wat Tδ(i) minimaal maakt, ga verder met deze politiek in stap 1
Als Tδ(i)=Vδ(i) dan is δ de optimale politiek

Opgave 4

a.
$\pi_1=14+0,25\ \pi_2$
$\pi_2=0,5\ \pi_1$
$\pi_3=0,5\ \pi_1+0,75\ \pi_2$

$\pi_1=14+1/8\ \pi_1=14*8/7=16$
$\pi_2=8$
$\pi_3=8+6=14$

Stationariteitsvoorwaarde:
$\rho_i = \pi_i/\mu_i < 1$ voor alle i
$\rho_1=16/20 < 1$
$\rho_2=8/12 < 1$
$\rho_3=14/18 < 1$

b. (Onzeker over juistheid van dit antwoord)
Kansverdeling van de wachtrijlengte van station 3 is geometrisch verdeeld met parameter $\pi_i/\mu_i=14/18$

c. (Onzeker over juistheid van dit antwoord)
$\rho_2=8/12$

d.
Verwachte aantal jobs bij station i: $L_i=\dfrac{\lambda_i}{\mu_i-\lambda_i}$

$L_1=16/(20-16)=4$
$L_2=8/(12-8)=2$
$L_3=14/(18-14)=3,5$

In totaal zijn er 9,5 jobs in het systeem

$W=L/\lambda=9,5/14 = 0,679$ uur = 40,7 minuten.

e.
Nee, dat klopt niet. In eerste instantie zit station 2 aan zijn max 8+4=12 jobs en dat ook het aantal dat het kan bewerken. Echter er wordt vergeten dat via station 1 nog meer jobs naar station 2 komen (2/7 r_2). Enig rekenwerk laat zien dat de nieuwe π_2=12 4/7 wordt
$\rho_2=12\ 4/7\ /12 > 1$...
r_2 moet kleiner zijn dan 3 1/9
($\pi_2<12 \rightarrow \pi_1<14+1/8\ \pi_1+1/8\ r_2<16+2/7\ r_2 \rightarrow 12 < 8 + 1\ 2/7\ r_2 \rightarrow r_2 < 3\ 1/9$)

Opgave 1

a) fasen n = 1 (A), 2 (B), 3 (C)

toestand en i = resterend aantal dagen voor fase n $i = 0,1,2,3,4,5$.

beslissing d_n aantal dagen besteden aan vak n $D_n(i) = \{x \mid 0 \le x \le i\}$

optimale waardefunctie: min kans op geen enkel gehaald vak

$$V_n(i) = \min \; R_n(d_n) \times V_{n+1}(i-d_n) \quad \text{met } D_n(i) = \{x \mid 0 \le x \le i\}$$

↓ uit tabel.
faalkans = 1 − slaagkans

Lo bij toestand i, nog 0−i dagen besteden aan vakken $n, n+1, \ldots, N$.

Laatste fase besteed je alle resterende tijd.

b.)
$V_3(0) = 0{,}90$
$V_3(1) = 0{,}70$
$V_3(2) = 0{,}55$
$V_3(3) = 0{,}45$
$V_3(4) = 0{,}35$
$V_3(5) = 0{,}30$

faalkans B.

$$V_2(5) = \min \begin{cases} 0{,}75 \times 0{,}30 = 0{,}225 & [0] \\ 0{,}50 \times 0{,}35 = 0{,}175 & [1] \\ 0{,}40 \times 0{,}45 = 0{,}180 & [2] \\ 0{,}30 \times 0{,}55 = 0{,}165 & [3]^* \\ 0{,}25 \times \overset{0{,}70}{\cancel{0{,}85}} = 0{,}175 & [4] \\ 0{,}20 \times \overset{0{,}90}{\cancel{0{,}70}} = 0{,}180 & [5] \end{cases}
\qquad
V_2(4) = \min \begin{cases} 0{,}75 \times 0{,}35 = & [0] \\ 0{,}50 \times 0{,}45 = & [1] \\ 0{,}40 \times 0{,}55 = & [2] \\ 0{,}30 \times 0{,}70 = 0{,}210 & [3]^* \\ 0{,}25 \times 0{,}90 = & [4] \end{cases}$$

$$V_2(3) = \min \begin{cases} 0{,}75 \times 0{,}45 = 0{,}3375 & [0] \\ 0{,}50 \times 0{,}55 = 0{,}275 & [1] \\ 0{,}40 \times 0{,}70 = 0{,}280 & [2] \\ 0{,}30 \times 0{,}90 = 0{,}270 & [3]^* \end{cases}
\qquad
V_2(2) \begin{cases} 0{,}75 \times 0{,}55 & [0] \\ 0{,}50 \times 0{,}70 = 0{,}350 & [1]^* \\ 0{,}40 \times 0{,}90 & [2] \end{cases}$$

$$V_2(1) = \min \begin{cases} 0{,}75 \times 0{,}70 & [0] \\ 0{,}50 \times 0{,}90 = 0{,}450 & [1]^* \end{cases}
\qquad
V_2(0) = \min \{0{,}75 \times 0{,}90\} = 0{,}6750 \quad [0]^*$$

$$V(5) = \begin{cases} 0{,}80 \times \cancel{0{,}65}\ 0{,}165 & [0] \\ 0{,}60 \times 0{,}210 & [1] \\ 0{,}40 \times 0{,}270 & [2] \\ 0{,}25 \times 0{,}350 = 0{,}0875 & [3]^{*} \\ 0{,}20 \times 0{,}450 & [4] \\ 0{,}15 \times 0{,}675 & [5] \end{cases}$$

Dus besteed 3 dagen aan vak A (1)
1 dag aan vak B (2)
1 dag aan vak C (3)

Kans dat je geen enkel vak haalt is dan 8,75%.

Opgave 2

a) toestanden $i \Rightarrow$ voorraad begin v.d. week $i = 0,1,2$
beslissing $d \Rightarrow$ bestellen $d = 0,1,2$
directe kosten $\rightarrow c(i,d)$
overgangskansen $\rightarrow p(j|i,d)$

$p(0\|0,0) = 1$	$p(1\|0,0) = 0$	$p(2\|0,0) = 0$
$p(0\|0,1) = 3/4$	$p(1\|0,1) = 1/4$	$p(2\|0,1) = 0$
$p(0\|0,2) = 1/4$	$p(1\|0,2) = 1/2$	$p(2\|0,2) = 1/4$
$p(0\|1,0) = 3/4$	$p(1\|1,0) = 1/4$	$p(2\|1,0) = 0$
$p(0\|1,1) = 1/4$	$p(1\|1,1) = 1/2$	$p(2\|1,1) = 1/4$
$p(0\|2,0) = 1/4$	$p(1\|2,0) = 1/2$	$p(2\|2,0) = 1/4$

$V(i) = \min\{ c(i,d) + \beta \sum p(j|i,d)\, V(j)$.

$c(0,0) = \underbrace{\left(0 + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{2}\times 240 + \frac{1}{4}\times 240\right)}_{\text{kosten voorraad bestellen}} = 180$ [0 voorraad, 0 best. vraag, 0,1,2 nabe]

$c(0,1) = (\underline{80 + 1.80} + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}\times 240) = 220$ [0 voorraad, 1 best, 0,1 nabest.]

$c(0,2) = (\underline{80 + 2.80} + 0) = 240$ [0 voorraad, 2 best, 0 nabest]

$c(1,0) = (0 + 0\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times 240) = 60$ [1 voorraad, 0 best, 0,1 nabest]

$c(1,1) = (80 + 80.1 + 0) = 160$ [1 voorraad, 1 best, 0 nabest]

$c(2,0) = (0 + 0) = 0$ [2 voorraad, 0 best, 0 nabest]

b) $V_0(i) = \min \begin{cases} 180 + 0{,}8 \cdot 1 V(0) & [0] \\ 220 + 0{,}8\left(\frac{3}{4}V_0 + \frac{1}{4}V_1\right) & [1] \\ 240 + 0{,}8\left(\frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{4}V_2\right) & [2] \end{cases}$

$V_1(i) = \min \begin{cases} 60 + 0{,}8\left(\frac{3}{4}V_0 + \frac{1}{4}V_1\right) & [0] \\ 160 + 0{,}8\left(\frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{4}V_2\right) & [1] \end{cases}$

$V_2(i) = \min\left\{ 0 + 0{,}8\left(\frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{4}V_2\right) \right.$ [0]

c.) $V_1(0) = \min \begin{cases} 180^* \\ 220 \\ 240 \end{cases}$

$V_1(1) = \min \begin{cases} 60^* \\ 160 \end{cases}$

$V_1(2) = \min \{0\}^*$

er wordt niks besteld in $V_1(i)$.

$$V_2(0) = \min \begin{cases} 180 + 0{,}8(\tfrac{4}{4}\,180) = 324 & [0] \\ 220 + 0{,}8(\tfrac{3}{4}\cdot 180 + \tfrac{1}{4}\,60) = 340 & [1] \\ 240 + 0{,}8(\tfrac{1}{4}\cdot 180 + \tfrac{1}{2}\,60 + \tfrac{1}{4}\cdot 0) = 300^* & [2] \end{cases}$$

→ 2 bestellen bij voorraad 0
verder niets

$$V_2(1) = \min \begin{cases} 60 + 0{,}8(\tfrac{3}{4}\cdot 180 + \tfrac{1}{4}\cdot 60) = 180^* & [0] \\ 160 + 0{,}8(\tfrac{1}{4}\cdot 180 + \tfrac{1}{2}\cdot 60 + \tfrac{1}{4}\cdot 0) = 220 & [1] \end{cases}$$

$$V_2(2) = \min \{ 0 + 0{,}8(\tfrac{1}{4}\cdot 180 + \tfrac{1}{2}\cdot 60 + \tfrac{1}{4}\cdot 0) = 60^* \quad [0].$$

d) $V = \begin{cases} 240 + 0{,}8(\tfrac{1}{4}V_0 + \tfrac{1}{2}V_1 + \tfrac{1}{4}V_2) \\ 60 + 0{,}8(\tfrac{3}{4}V_0 + \tfrac{1}{4}V_1) \\ 0 + 0{,}8(\tfrac{1}{4}V_0 + \tfrac{1}{2}V_1 + \tfrac{1}{4}V_2) \end{cases}$

$\Rightarrow V_0 = 240 + \frac{1}{5}V_0 + \frac{2}{5}V_1 + \frac{1}{5}V_2$ → wil V_0 weten

$\Rightarrow V_1 = 60 + \frac{3}{5}V_0 + \frac{1}{5}V_1$

$\Rightarrow V_2 = 0 + \frac{1}{5}V_0 + \frac{2}{5}V_1 + \frac{1}{5}V_2$

$\Rightarrow \frac{4}{5}V_1 = 60 + \frac{3}{5}V_0 \Rightarrow V_1 = 75 + \frac{3}{4}V_0$

$\Rightarrow \frac{4}{5}V_2 = 0 + \frac{1}{5}V_0 + \frac{2}{5}(75 + \frac{3}{4}V_0)$

$\frac{4}{5}V_2 = 0 + \frac{2}{10}V_0 + 30 + \frac{3}{10}V_0$

$\frac{4}{5}V_2 = 30 + \frac{1}{2}V_0$

$V_2 = 37{,}5 + \frac{5}{8}V_0$

$\frac{4}{5}V_0 = 240 + \frac{2}{5}V_1 + \frac{1}{5}V_2$

$\frac{4}{5}V_0 = 240 + \frac{2}{5}(75 + \frac{3}{4}V_0) + \frac{1}{5}(37{,}5 + \frac{5}{8}V_0)$

$\frac{4}{5}V_0 = 240 + 30 + \frac{3}{10}V_0 + 7{,}5 + \frac{1}{8}V_0$

$\frac{4}{5}V_0 = 277{,}5 + \frac{17}{40}V_0$

$\frac{3}{8}V_0 = 277{,}5 \Rightarrow V_0 = 740.$

e) ① Reken met V_0 ook V_1 en V_2 uit!

③ Waardes invullen in recursieve betrekking
en polities vergelijken. Indien nieuwe uitkomsten
minder zijn dan huidige ⇒ niet optimaal.
- ga verder door met stap 1 voor volgende verbeterstap.
- wanneer uitkomst gelijk is aan vorige polis dan optimaal.

Opgave 3

$\lambda = \frac{1}{\mu} = 3$ $\quad \lambda = 3$

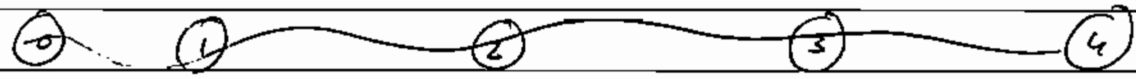
$\mu_1 = \frac{1}{\mu_1} = 2 \quad \mu_1 = 2$

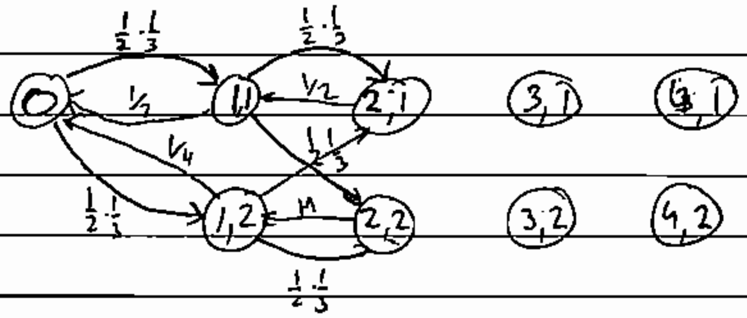
$\mu_2 = \frac{1}{\mu_2} = 4 \quad \mu_2 = 4$

i = # studenten die hulp nodig hebben $i = 0,1,2,3,4$

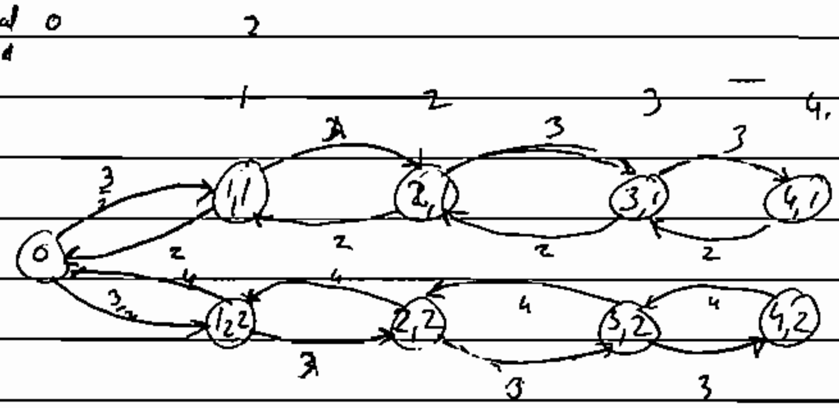
$d =$

j = beantwoord door Leo (1) beantwoord door Guendolyn (2)





totaal in syst



$\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)P_0 = 2P_{11} + 4P_{12}$	$\Rightarrow 3P_0 = 2P_{11} + 4P_{12}$	$P_0 = \frac{2}{3}P_{11} + \frac{4}{3}P_{12}$
$(3+2)P_{11} = \frac{3}{2}P_0 + 2P_{21}$	$5P_{11} = 1\frac{1}{2}P_0 + 2P_{21}$	$P_{11} = \frac{3}{10}P_0 + \frac{2}{5}P_{21}$
$(3+4)P_{12} = 4P_{22} + \frac{3}{2}P_0$	$7P_{12} = 4P_{22} + 1\frac{1}{2}P_0$	$P_{12} = \frac{4}{7}P_{22} + \frac{3}{14}P_{21}$
$(3+2)P_{21} = 3P_{11} + 2P_{31}$	$5P_{21} = 3P_{11} + 2P_{31}$	$P_{21} = \frac{3}{5}P_{11} + \frac{2}{5}P_{31}$
$(4+3)P_{22} = 3P_{12} + 4P_{32}$	$7P_{22} = 3P_{12} + 4P_{32}$	$P_{22} = \frac{3}{7}P_{12} + \frac{4}{7}P_{32}$
$(2+3)P_{31} = 3P_{21} + 2P_{41}$	$5P_{31} = 3P_{21} + 2P_{41}$	$P_{31} = \frac{3}{5}P_{21} + \frac{2}{5}P_{41}$
$(4+3)P_{32} = 3P_{22} + 4P_{42}$	$7P_{32} = 3P_{22} + 4P_{42}$	$P_{32} = \frac{3}{7}P_{22} + \frac{4}{7}P_{42}$
$(2)\ P_{41} = 3P_{31}$	$2P_{41} = 3P_{31}$	$P_{41} = \frac{3}{2}P_{31}$
$4P_{42} = 3P_{32}$	$4P_{42} = 3P_{32}$	$P_{42} = \frac{3}{4}P_{32}$

$$P_{32} = \frac{3}{7} P_{22} + \frac{4}{7}\left(\frac{3}{4} P_{32}\right)$$
$$P_{32} = \frac{3}{7} P_{22} + \frac{3}{7} P_{32}$$
$$P_{32} = \frac{12}{49} P_{22}$$

$$P_{31} = \frac{3}{5} P_{21} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2} P_{31}\right)$$
$$P_{31} = \frac{3}{5} P_{21} + \frac{3}{5} P_{31}$$
$$P_{31} = \frac{3}{2} P_{21}$$

$$P_{42} = \frac{3}{4}\left(\frac{12}{49} P_{22}\right)$$
$$P_{42} = \frac{9}{49} P_{22}$$

$$P_{22} = \frac{3}{7} P_{12} + \frac{4}{7}\left(\frac{12}{49} P_{22}\right)$$
$$P_{22} = \frac{3}{7} P_{12} + 48/343\, P_{22}$$
$$P_{22} = 147/295\, P_{12}$$

$$P_{21} = \frac{3}{5} P_{11} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2} P_{21}\right)$$
$$P_{21} = \frac{3}{5} P_{11} + \frac{3}{5} P_{21}$$
$$P_{21} = \frac{3}{2} P_{11}$$

$$P_{12} = \frac{4}{7}\left(147/295\, P_{12}\right) + \frac{3}{14} P_{21}$$
$$P_{12} = 84/295\, P_{12} + \frac{3}{14} P_{21}$$
$$P_{12} = 885/2954\, P_{21}$$

$$P_{11} = \frac{3}{10} P_0 + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2} P_{11}\right)$$
$$P_{11} = \frac{3}{10} P_0 + \frac{3}{5} P_{11}$$
$$P_{11} = \frac{3}{4} P_0$$

$$P_0 = \frac{2}{3} P_{11}\left(\frac{3}{4} P_0\right) + \frac{4}{3} P_{12}$$
$$P_0 = 8/3\, P_{12}$$

$$P_{21} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{4} P_0\right)$$
$$\underline{P_{21} = 9/8\, P_0}$$

$$P_{12} = 885/2954\left(9/8\, P_0\right)$$
$$\underline{P_{12} = 0{,}337\, P_0}$$

$$P_{42} = \frac{9}{49}\cdot\left(567/3376\right) P_0$$
$$\underline{P_{42} = 0{,}03..\, P_0}$$

$$P_{22} = \left(147/295\right)\cdot 0{,}337\, P_0$$
$$\underline{P_{22} = 567/3376 \cdot P_0}$$

$$P_{31} = \frac{3}{2}\cdot 9/8\, P_0$$
$$\underline{P_{31} = 27/16\, P_0}$$

$$P_{32} = \frac{12}{49}\left(567/3376\, P_0\right)$$
$$\underline{P_{32} = 243/5908}$$

$$P_{41} = \frac{3}{2}\cdot\left(27/16\, P_0\right)$$
$$\underline{P_{41} = 81/32\, P_0}$$

$$P_0 + P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22} + P_{31} + P_{32} + P_{41} + P_{42} = 1$$

$$P_0 + \frac{3}{4} P_0 + 0{,}337..\, P_0 + 9/8\, P_0 + 27/16\, P_0 + 243/5908\, P_0 + 81/32\, P_0 + 0{,}03..\, P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{7{,}5..} \approx 0{,}133$$

P_{overig} Invullen geeft

c) $EW = L_w / \lambda$ $\quad L = \lambda . W \quad EW_q = L_q / \lambda \quad \lambda = \frac{1}{\mu} \quad EW_q = L_q / \frac{1}{\mu}$

$\hookrightarrow (P_{31} + P_{41}) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} . 60\,\text{MIN}}_{30} + (P_{32} + P_{42}) \underbrace{\frac{1}{4} . 60}_{15}$ $= \frac{(P_{31} + P_{41}) . 60}{2} + \frac{P_{32} + P_{42} . 60}{4}$

d) $(P_{41} + P_{42}) \cdot \underbrace{\frac{1}{3} . 60}_{20}$ MIN $\quad \frac{1}{\lambda}(P_{41} + P_{42})$

e.) $P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42}$

f.) $\cancel{2 . P_{11} + 2 . P}$ $\quad \underbrace{\frac{1}{2} . 60}_{30} (P_{11} + P_{2,1} + P_{31} + P_{41})$

g) $\frac{1}{2} . 60 \rightarrow$ 30 MIN

$= \mu = 30$ MIN

Opgave 4

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) P_1 = 14 + \frac{1}{4} P_2 \Rightarrow P_1 = 14 + \frac{1}{4} P_2 \Rightarrow P_1 = 14 + \frac{1}{8} P_1 \Rightarrow P_1 = 16$

$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) P_2 = \frac{1}{2} P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2} P_1 \qquad P_2 = \frac{1}{2} P_1 \Rightarrow P_2 = 8$

$P_3 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{3}{4} P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{3}{4} P_2 \qquad P_3 = \frac{1}{2} P_1 \cdot \frac{3}{8} P_1 \Rightarrow P_3 = \frac{7}{8} P_1$

$P_3 = 14$

$\cancel{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1}$

$\cancel{14 + \frac{1}{8} P_1 + \frac{1}{2} P_1 + \frac{7}{8} P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{2}{31}}$

$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$ voor alle i

$\rho_1 = \frac{16}{20} < 1$

$\rho_2 = \frac{8}{12} < 1$

$\rho_3 = \frac{14}{18} < 1$

b) ? $P_3(n) = (1-\rho_3)\rho_3^n$

c. ~~Usp~~ $\rho_2 = \frac{8}{12}$

d) $L_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} \qquad L_1 = 16/_{20-16} = 4 \quad ; L_2 = 8/(12-8) = 2 \quad ; L_3 = 14(18-14) = 3{,}5 \Big\} 4+2+3{,}5 = 9{,}5$

$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{9{,}5}{14} = 0{,}679\,u = 40{,}7\,min.$

e.) Nu $P_1 = 18 + \frac{1}{8} P_1$

$\frac{7}{8} P_1 = 18$

$P_1 = \frac{144}{7} \qquad \rho_1 = \frac{\frac{144}{7}}{20} \not< 1$

dus stelling is onjuist.

(11)

opgave 2010/2011

-WC 7

FACULTEIT BEDRIJF, BESTUUR en TECHNOLOGIE
Kenmerk: OMPL05.018/lw
Datum: 31 maart 2005

TENTAMEN STOCHASTISCHE MODELLEN IN OPERATIONS MANAGEMENT (153088)

Maandag 4 april 2005, 9.00-12.00 uur

Opmerkingen vooraf:
1. Gelieve het blok bovenaan het tentamformulier in te vullen, inclusief studentnummer, opleiding en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi, grafische rekenmachines of aantekeningen is niet toegestaan bij dit tentamen. Een eenvoudige rekenmachine is wel toegestaan.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
4. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4.
5. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.

Opgave 1 (9 punten)
Buschauffeur Carlos maakt elke dag met een luxe touringcar vanuit zijn standplaats Trujillo een tour door het Andesgebergte. Aan boord is iedere dag een ander gezelschap buitenlandse toeristen dat Carlos aan het eind van de rit, in de late avond, ruim beloont met fooien. Deze fooien zijn voor Carlos erg belangrijk. Ze vormen een welkome aanvulling op zijn bescheiden vaste salaris. Zoals de meeste Peruanen kan Carlos goed tegen tropische temperaturen. Buitenlanders hebben daar wat meer problemen mee. Om die reden willen ze op hete dagen graag de airco aan in de bus. En daar komt het probleem: Carlos is slecht bestand tegen de airco. Hij wordt er verkouden van.

Carlos' fysieke gesteldheid kan (ruwweg) in twee condities verkeren: goed of slecht. Is zijn gesteldheid goed dan *is zijn rijstijl goed*. Is zijn gesteldheid op een bepaalde dag slecht maar was zijn gesteldheid de dag daarvoor goed, dan *is zijn rijstijl matig*. Is zijn gesteldheid op een bepaalde dag slecht en was zijn gesteldheid de dag daarvoor ook slecht, dan *is zijn rijstijl slecht*. In dat laatste geval rijdt hij als een krant en ontwijkt hij ternauwernood ravijnen. Op zijn fysieke gesteldheid heeft de airco een cruciale invloed.

Het is maandagochtend 6.00 uur en het belooft een hete week te worden. Carlos heeft op maandag, dinsdag en woensdag een tour. De donderdag daarop is het Eerste Kerstdag en is hij vrij.
Iedere ochtend om 6.00 uur kijkt Carlos hoe hij zich voelt. Hij besluit dan of hij die dag in de bus de airco aanzet of niet. Op deze maandagmorgen voelt hij zich goed. Wanneer

Carlos' fysieke gesteldheid aan het begin van een dag goed is en hij zet de airco niet aan dan is zijn gesteldheid de volgende dag met kans 0.8 weer goed. Wanneer Carlos' fysieke gesteldheid aan het begin van een dag goed is en hij zet de airco wel aan dan is zijn gesteldheid de volgende dag met kans 0.3 weer goed. Wanneer Carlos' fysieke gesteldheid aan het begin van een dag slecht is en hij zet de airco niet aan dan is zijn gesteldheid de volgende dag met kans 0.7 goed. Wanneer Carlos' fysieke gesteldheid aan het begin van een dag slecht is en hij zet de airco wel aan dan is zijn gesteldheid de volgende dag met kans 0.1 goed.
Ieder gezelschap drukt de waardering voor een dagje Carlos uit in de hoogte van de fooien. De fooihoogte hangt af van twee factoren: Carlos' rijstijl en Carlos' aircogedrag. Is Carlos' rijstijl die dag goed en heeft hij de airco aan, dan ontvangt hij 's avonds 300 Soles aan fooien. Is Carlos' rijstijl die dag goed en heeft hij de airco niet aan, dan ontvangt hij 's avonds 200 Soles aan fooien. Is Carlos' rijstijl die dag matig en heeft hij de airco aan, dan ontvangt hij 's avonds 200 Soles aan fooien. Is Carlos' rijstijl die dag matig en heeft hij de airco niet aan, dan ontvangt hij 's avonds 100 Soles aan fooien. Is Carlos' rijstijl die dag slecht en heeft hij de airco aan, dan ontvangt hij 's avonds 100 Soles aan fooien. Is Carlos' rijstijl die dag slecht en heeft hij de airco niet aan, dan ontvangt hij 's avonds 50 Soles aan fooien.
Bepaal de maximale opbrengst (aan fooien) over de drie bovenbeschreven dagen.

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat kies je als:
   - fasen (beslissingstijdstippen)
   - toestanden
   - beslissingen
   - optimale-waarde functie.
b) Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waarde functie.
c) Los het probleem op via dynamische programmering.
d) Geef een *policy table.*

Opgave 2 (9 punten)
Bij de productie van vliegtuigen worden onderdelen gebakken in een speciaal daarvoor bestemde bakoven. De productie in deze bakovens vindt plaats d.m.v. productie-runs die een volle dag duren. Vindt op een dag een productie-run plaats, dan worden alle aanwezige onderdelen (met een maximum van drie) in de oven gebakken om vervolgens te worden getransporteerd naar een volgende afdeling. Liggen aan het begin van een dag tenminste drie onderdelen te wachten, dan wordt altijd een productie-run gestart. Liggen er één of twee onderdelen te wachten, dan kan de productiemanager kiezen om al dan niet te produceren.
Het aankomstproces van onderdelen is stochastisch. Elke dag komt er maximaal één onderdeel binnen (voordat de beslissing genomen wordt om al dan niet een productie-run te starten). Met kans 2/3 komt er een onderdeel binnen, met kans 1/3 niet.
Aan het begin van dag 1, na een eventuele aankomst van een onderdeel, zijn niet meer dan 3 onderdelen aanwezig. De kosten voor een productie-run bedragen 1000 euro. De kosten van onderhanden werk worden geschat op 100 euro per dag per onderdeel aanwezig aan het begin van de dag, inclusief een eventueel net gearriveerd onderdeel.

De productiemanger vraagt zich af wat een optimale productiestrategie is die de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. Het bedrijf hanteert een verdisconteringsfactor van 0.75 per dag.

a) Verklaar waarom aan het begin van een dag nooit meer dan 3 onderdelen voor de oven liggen te wachten.
b) Bepaal voor dit Markov beslissingsprobleem respectievelijk de toestanden, de mogelijke beslissingen in een bepaalde toestand, de directe kosten als functie van de toestand en de beslissing, en de overgangskansen.
c) Formuleer de optimaliteitsvergelijking.
d) Gebruik *policy iteration* om te bepalen of de huidige strategie die pas een productie-run start als er 3 onderdelen liggen te wachten optimaal is.
e) Formuleer een LP-probleem waarmee de optimale stationaire politiek bepaald kan worden.

Opgave 3 (10 punten)
Bij een werkcollege SMOM zijn 125 studenten aanwezig. Voor het beantwoorden van vragen zijn de docent (Leo) en twee studentassistenten (Marieke en Jaap) aanwezig. De tijd tussen 2 tijdstippen waarop een student(e) te kennen geeft graag hulp te hebben door zijn of haar vinger op te steken, is negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten.
Als er 6 studenten zijn met een vraag (3 die geholpen worden en drie die op hulp wachten), dan vragen andere studenten niet meer om hulp. Het beantwoorden van een vraag door Leo vergt een negatief exponentieel verdeelde tijdsduur met een gemiddelde van 3 minuten. Marieke en Jaap kost het beantwoorden van een vraag gemiddeld 4 minuten. De docent maakt zich zorgen over de werkbelasting voor de studentassistenten. Daarom beantwoordt Leo de eerste vraag steeds zelf. Indien hij een vraag beantwoord heeft en een van de studentassistenten is nog bezig, dan neemt Leo de beantwoording van de vraag over (van een van hen).

a) Teken een transitiediagram voor deze situatie.
b) Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en bepaal hieruit de evenwichtskansen.

$$\frac{P_4 + 2P_5 + 3P_6}{\lambda = 20}$$

De antwoorden van de volgende vragen mogen uitgedrukt worden in de evenwichtskansen uit onderdeel b).

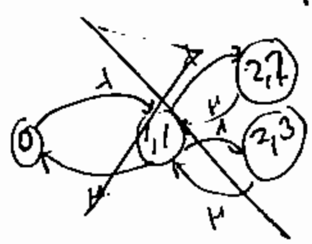
$W_q = L_q / \lambda$

c) Hoeveel minuten wacht een student(e) gemiddeld tot zijn of haar vraag beantwoord is?
d) Hoeveel studenten per uur zien naar verwachting af van het stellen van een vraag? $P_6 \lambda$
e) Welke fractie van de tijd zijn Marieke en Jaap gemiddeld bezig met het beantwoorden van vragen (aannemende dat ze het werk eerlijk verdelen)?
f) Hoeveel vragen beantwoordt Leo gemiddeld per uur?

$\lambda \; \cancel{\mu} = 20$ $\quad \to P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_2$

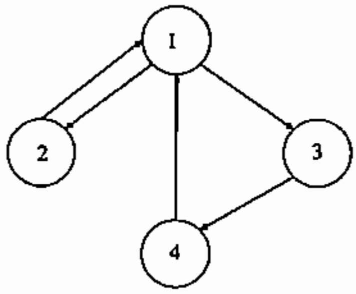
λP_1

$1 - (P_0 + P_1)$



(11)

Opgave 4 (8 punten)
Beschouw de onderstaande Markov keten.



De overgangskansen van toestand i naar toestand j worden gegeven in de volgende tabel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bepaal de stationaire kansverdeling voor deze Markov keten.
b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 4 te bereiken.

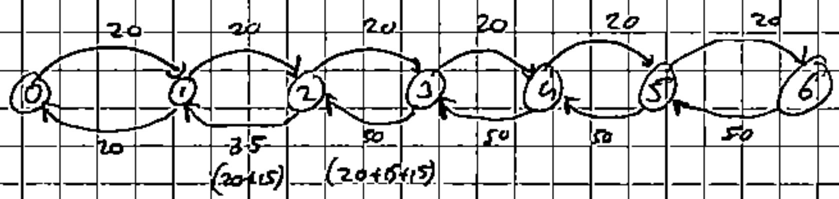
Beschouw de Markov keten nu als een gesloten netwerk. We spreken vanaf nu van stations in plaats van toestanden.
Neem aan dat er m klanten in het systeem aanwezig zijn.
Neem aan dat ieder station een enkele server heeft en dat in de wachtruimtes bij de stations plaats is voor alle aankomende klanten. De gemiddelde bedieningsrate (per tijdseenheid) in de verschillende stations bedraagt resp. $\mu_1 = 4/5$, $\mu_2 = 4/5$, $\mu_3 = 1/5$ en $\mu_4 = 4/5$.

c) Bepaal m.b.v. *mean value analysis* het verwachte aantal klanten en de gemiddelde verblijftijd bij de 4 stations voor m = 1 en m = 2.
d) Bepaal voor m = 2 m.b.v. het algoritme van Buzen de kans dat er $(n_1,\dots,n_4)$ klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations.
e) Wat is de bezettingsgraad van station 2?

Opgave 3

a) $\lambda = 3$ min $\Rightarrow \frac{60}{3} = 20$ $60 \Rightarrow \mu = 3$ min $\Rightarrow \frac{60}{3} = 20$

μ student assistent $\frac{60}{?20} = \frac{60}{40} = 15$



b)

$20 P_0 = 20 P_1$
$40 P_1 = 20 P_0 + 35 P_2$
$55 P_2 = 20 P_1 + 50 P_3$
$70 P_3 = 20 P_2 + 50 P_4$
$70 P_4 = 20 P_3 + 50 P_5$
$70 P_5 = 20 P_4 + 50 P_6$
$50 P_6 = 20 P_5$

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

$P_1 = P_0$
$35 P_2 = 20 P_0$, $P_2 = \frac{20}{35} P_0$
$50 P_3 = 16\frac{2}{3} P_0$, $P_3 = \frac{8}{35} P_0$
$50 P_4 = 11\frac{4}{21}$, $P_4 = P_0 \frac{16}{175}$
$50 P_5 = 10 P_0 \frac{?}{21}$, $P_5 = P_0\, 32/875$
$50 P_6 = 9\frac{3}{21} P_0$, $P_6 = P_0\, 0{,}01463$

$2{,}94263 P_0 = 1$ $P_0 \approx 0{,}3398$ etc overige P_i's berekenen.

c) $W_q = \frac{L_q}{\lambda} \Rightarrow \frac{P_4 + 2P_5 + 3P_6}{20}$

d) λP_6

e) $P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \overset{of}{\Rightarrow} 1 - (P_0 + P_1)$

f) λP_1

12

Kenmerk: EWI05/TW/SOR/003/RB
Datum: 13 March 2007

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Vrijdag 14 januari 2005, 9:00 – 12:00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Eindcijfer = (10 + aantal behaalde punten)/10. Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

Opgave 1 (20 punten)

Piet bezit aandelen van een beursgenoteerd bedrijf. De huidige prijs van het aandeel bedraagt € 80,-. Gemakshalve gaan we er vanuit dat bij iedere dag één prijs hoort. Piet wil de aandelen uiterlijk binnen vier dagen verkopen en moet dus beslissen of hij zijn aandelen nu verkoopt of dat hij 1, 2 of 3 dagen wacht met verkopen. De effectenmarkt fluctueert sterk en Piet denkt dat de prijs van dag op dag hetzij met € 20,- stijgt of met € 20,- daalt. De kansen op deze veranderingen worden door hem als volgt ingeschat (de huidige dag is dag 1)

dag	kans op stijging	kans op daling
2	p	1-p
3	1/2	1/2
4	4/5	1/5

Op dag 2 is de prijs dus € 100,- met kans p of € 60,- met kans 1-p, enz. Gezocht wordt de optimale beslissing op de eerste dag als functie van p ($0 \leq p \leq 1$), welke de verwachte verkoopprijs maximaliseert.

a) Formuleer het probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Wat kiest u als
   (i) fasen (beslissingsmomenten)
   (ii) toestanden
   (iii) beslissingen
   (iv) optimale waardefunctie
b) Geef de D.P. recursie voor de optimale waardefunctie.
c) Bepaal (via D.P.) de optimale beslissing op dag 1 als functie van p. Hoe groot is de maximale verwachte verkoopprijs voor $p = 1/4$?

Opgave 2 (25 punten)
Een machine kan zich in drie toestanden bevinden: "goed", "matig" en "slecht". Bevindt de machine zich aan het begin van de week in de toestand "goed" (resp. "matig") dan wordt die week een opbrengst verkregen van € 100,- (resp. € 50,-). Is de toestand "slecht" dan krijgt de machine een grote beurt, tegen kosten € 200,-, en is de machine een week uit roulatie, waarna hij zich aan het begin van de volgende week in de toestand "goed" bevindt. In de toestand "goed" kan gedurende de week klein onderhoud worden gepleegd, tegen kosten € 50,-. In dit geval blijft de opbrengst in de betreffende week ongewijzigd, maar is de toestand aan het begin van de volgende week met zekerheid: "goed". Is de toestand aan het begin van een week "matig" dan kan de machine een week uit roulatie genomen worden en tegen kosten € 100,- aan het begin van de volgende week in toestand "goed" worden gebracht.
Worden geen onderhoudswerkzaamheden verricht dan verloopt de toestand volgens de overgangskansen in onderstaande tabel.

		toestand volgende week		
		goed	Matig	slecht
Toestand huidige week	goed	0.8	0.2	-
	matig	-	0.5	0.5

Het optimaliteitscriterium is de contante waarde van de netto verwachte opbrengsten, met verdisconteringsfactor $\alpha=1/2$.

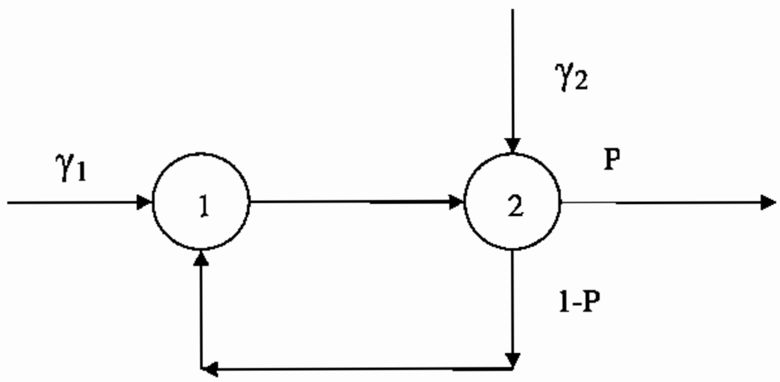
a) Geef de optimaliteitsvergelijkingen.
b) Geef twee iteraties van het waarde-iteratie algoritme.
c) Kies een onderhoudsstrategie en onderzoek m.b.v. het policy-iteratie algoritme of deze politiek optimaal is.
d) Geef een L.P. model waarmee de optimale politiek bepaald kan worden. Vindt deze politiek door het L.P. model grafisch op te lossen.

Opgave 3 (25 punten)
Een continu bedrijf produceert goederen op een 3-tal identieke machines. Per machine is de productie 1000 stuks per dag. Elke machine is aan storingen onderhevig. Het verhelpen van een storing gebeurt door een monteur. De daarmee gemoeide reparatietijd kent een exponentiële verdeling met een gemiddelde van 1 dag. Na het verhelpen van een storing is een machine weer als nieuw.
De tijd tot het optreden van een storing vanaf het in gebruik nemen van een gerepareerde machine heeft een exponentiële kansverdeling met een gemiddelde van 4 dagen. Voor het onderhoud zijn 2 gelijkwaardige monteurs beschikbaar.

a) Definieer de 4 toestanden waarin dit systeem zich kan bevinden.
b) Teken een toestandsdiagram waarin de overgangsintensiteiten tussen de verschillende toestanden zijn aangegeven.
c) Bereken de fracties van de tijd waarmee het systeem zich in elk van de toestanden bevindt.
d) Wat is de bezettingsgraad van de onderhoudsafdeling?
e) Wat is het verwachte aantal machines in storing?
Wat is de gemiddelde dagproductie?
f) Wat is de frequentie van optreden van storingen in het systeem als geheel?

12

Opgave 4 (20 punten)
Beschouw een open exponentieel netwerk bestaande uit 2 stations als weergegeven in onderstaande figuur, samen met de overgangskansen tussen de stations (een klant die uit station 1 vertrekt gaat altijd naar station 2, en een klant die uit station 2 vertrekt gaat met kans 1-P naar station 1, en verlaat het systeem met kans P) . Het systeem is stationair. De gemiddelde bedieningsduur van station i is μ_i^{-1}, i=1,2. De externe aankomstintensiteit bij station i is γ_i, i=1,2.



a) Formuleer de stroomvergelijkingen en los deze op.
b) Hoe luidt de stationariteitsvoorwaarde?
c) Geef de kansverdeling van de wachtrijlengte bij de 2 stations.
d) Geef de simultane kansverdeling van de wachtrijlengte bij de 2 stations.
e) Geef voor ieder station een uitdrukking voor het gemiddelde aantal klanten en voor de gemiddelde verblijftijd van een klant.
f) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd in het netwerk voor een willekeurige klant.

13

Kenmerk: EWI04/TW/SOR/109/RB
Datum: 13 March 2007

Tentamen Stochastische Modellen in Operations Management (153088)
Woensdag 11 augustus 2004, 9:00 – 12:00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Eindcijfer = (10 + aantal behaalde punten)/10. Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

Opgave 1 (20 punten)
Je doet mee aan een quiz, en belandt in de finale met een bedrag in kas van € 3750. In deze finale kun je d.m.v. een gokspelletje je bedrag nog enigszins verhogen. Dit spelletje bestaat uit maximaal drie beurten. Bij iedere beurt mag je besluiten te stoppen, om daarmee het bedrag in kas te incasseren. Zo niet, dan moet je aan een speciaal rad draaien om te bepalen met hoeveel je bedrag zal worden opgehoogd. Je loopt daarbij echter het risico op BLUT te belanden, waardoor je al je geld kwijtraakt (maar nog wel mag doorspelen). Je vraagt je af wat te doen teneinde je verwachte eindbedrag te maximaliseren. Het rad ziet er (schematisch) als volgt uit:

uitkomst	€ 250	€ 500	€ 1000	BLUT
kans	0.4	0.3	0.2	0.1

Je kunt dit probleem oplossen m.b.v. een stochastisch DP-formulering. Definieer hiertoe $f_n(x)$ als je maximale verwachte eindbedrag indien je € x in kas hebt na de n^e beurt.

(a) Benoem de fasen, toestanden en beslissingen in bovenstaande formulering. Geef bovendien de toestandsruimte in elke fase.
(b) Beargumenteer dat $f_3(x)=x$ voor $x \geq 4500$, en $f_2(x)=0.9\,x+450$ voor $x \leq 4500$.
(c) Geef de recurrente betrekkingen voor $f_0(x)$, en $f_1(x)$.
(d) Bepaal m.b.v. de achterwaartse recursie je optimale strategie, en geef deze in woorden weer. Hoeveel bedraagt je verwachte eindbedrag?

<u>Opgave 2</u> (25 punten)
Piet is een ondernemende student die een speciaal product op de markt brengt. Zijn marktsituatie kan zich iedere week in twee toestanden bevinden: het product loopt "goed" of "slecht". Als het deze week "goed" loopt is de kans dat het volgende week "goed" loopt 1/2. Als het deze week "slecht" loopt is de kans dat het de daaropvolgende week "goed" loopt 2/5.
In de toestand "goed" heeft Piet de keuze om al dan niet te adverteren; in de toestand "slecht" heeft hij de keuze om al dan niet "research" te doen. Wordt in de toestand "goed" geadverteerd dan is de kans 8/10 dat het product de volgende week "goed" loopt. Wordt in de toestand "slecht" research gedaan dan is de kans 7/10 dat de toestand de volgende week "goed" is.
De netto opbrengsten per week, afhankelijk van Piet's acties en de toestandsovergangen zijn als volgt.

			Nieuwe toestand	
			goed	Slecht
Huidige toestand	Goed	Adverteren	4	4
		Niet adv.	9	3
	slecht	Research	1	-19
		Geen Res.	3	-7

Ter illustratie: als de huidige toestand "goed" is en Piet besluit niet te adverteren, dan is de netto opbrengst 9 indien het product de volgende week ook "goed" loopt en 3 indien het product de volgende week "slecht" loopt.

Gezocht wordt een politiek welke de verwachte verdisconteerde opbrengsten over een oneindige horizon maximaliseert met disconteringsfactor ½.

(a) Geef de optimaliteitsvergelijking(en).
(b) Welke stationaire politieken zijn er?
(c) Voer twee iteraties van het waarde-iteratie algoritme uit.
(d) Laat m.b.v. het strategie-iteratie algoritme zien dat de stationaire politiek: "adverteren" en "geen research", niet optimaal is. Wat is de volgende politiek die in het strategie-iteratie algoritme wordt onderzocht?

Opgave 3 (25 punten)

Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ bij een wachtsysteem met 2 wachtplaatsen en één server. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde μ^{-1}. Als de server werkt is deze onderhevig aan stochastische uitval volgens een Poissonproces met intesiteit α. Als de server uitvalt, wordt deze onmiddellijk gerepareerd. De reparatieduren zijn exponentieel verdeeld met gemiddelde β^{-1}.
Na reparatie functioneert de server weer als "nieuw" en begint weer met de bediening die op moment van uitval onderhanden was.
Een klant die het systeem vol aantreft gaat verloren.
Alle onderliggende stochastische variabelen zijn onderling onafhankelijk.

(a) Beschrijf het toestandsproces met zijn toestanden [bedenk dat zowel het aantal klanten in het systeem als de toestand van de server in de toestandsbeschrijving opgenomen moeten worden] d.m.v. een overgangsintensiteitendiagram.
(b) Geef de balansvergelijkingen en los ze op.

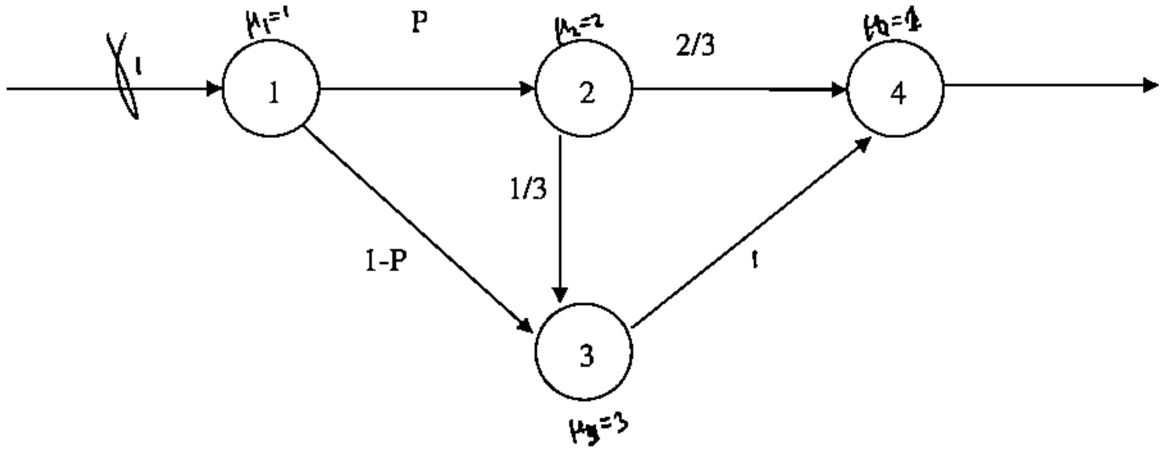
De antwoorden op de volgende vragen moeten uitgedrukt worden in de gegeven parameters en toestandskansen.

(c) Hoe groot zijn de binnenkomst- en vertrekintensiteit?
(d) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten in het systeem.
(e) Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server bezig is met bedienen?
(f) Hoe groot is de fractie van de tijd dat de server in reparatie is?
(g) Wat is de verdeling van de tijd gedurende welke het systeem ononderbroken leeg is?

13

<u>Opgave 4</u> (20 punten)

Beschouw een open exponentieel netwerk bestaande uit 4 stations als weergegeven in onderstaande figuur, samen met de overgangskansen tussen de stations. Het systeem is stationair. De gemiddelde bedieningsduur van station i is μ_i^{-1}, i=1,2,3,4, met waarden $\mu_1=1$, $\mu_2=2$, $\mu_3=3$, $\mu_4=1$. De externe aankomstintensiteit bij station 1 is γ_1.



$\frac{\lambda_i}{\mu_i}$

(a) Formuleer de stroomvergelijkingen en los deze op.
(b) Hoe luidt de stationariteitsvoorwaarde?
(c) De toestand van het netwerk is (n_1, n_2, n_3, n_4), de aantallen klanten bij station 1, 2, 3, 4. Geef de kansverdeling van de aantallen klanten bij de vier stations.
(d) Geef voor ieder station een uitdrukking voor het gemiddelde aantal klanten en voor de gemiddelde verblijftijd van een klant.
(e) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde verblijftijd van een klant in het netwerk.

Uitwerking 2004

(13)

(1) (a) fasen = rangnummers beurt = {0, 1, 2, 3} (1)

toestand = hoeveelheid in kas (1)

beslissingen = {stoppen of doorgaan} (1)

fase	toestandsruimte
0	3750
1	0, 4000, 4250, 4750
2	0, 250, 500, 1000, 4250, 4500, 4750, ~~5000~~, 5250, 5750
3	0, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 2000, 4500, 4750, 5000, 5250, 5500, 5750, 6000, 6250, 6750.

(2)

5

(b) Na ~~het~~ de 3e ~~spel~~beurt is het spel afgelopen en is dus x in $f_3(x)$ het eindbedrag. (2)

5

(c) Per definitie geldt dat

$$f_2(x) = \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} f_3(x+250) + \frac{3}{10} f_3(x+500) + \frac{2}{10} f_3(x+1000) + \frac{1}{10} f_3(0) & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} x \\ \frac{4}{10}(x+250) + \frac{3}{10}(x+500) + \frac{2}{10}(x+1000) + \frac{1}{10} \cdot 0 \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ 0.9x + 450 & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

Dus

$$f_2(x) = x \quad \text{voor} \quad x \geq 0.9x + 450 \iff x \geq 4500$$

$$= 0.9x + 450 \quad \text{voor} \quad x \leq 4500$$

(13)

2

Een "eenvoudiger" redenering: ledere redenatie (3)

- als je stopt is het eindbedrag x
- ga je door, dan is het gemiddelde eindbedrag

$$\frac{4}{10}(x+250)+\frac{3}{10}(x+500)+\frac{2}{10}(x+1000)+\frac{1}{10}\cdot 0 = 0.9x+450$$

Dit leidt tot dezelfde conclusie.

Nog eenvoudiger:

- de gemiddelde opbrengst van doorgaan bedraagt:

$$\frac{4}{10}\cdot 250+\frac{3}{10}\cdot 500+\frac{2}{10}\cdot 1000-\frac{1}{10}\cdot x = 450-\frac{1}{10}\cdot x$$

Dit is alleen voordelig als dit niet-negatief is, dus $x \geq 4500$.

(c)

$$f_k(x) = \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10}f_{k+1}(x+250)+\frac{3}{10}f_{k+1}(x+500)+\frac{2}{10}f_{k+1}(x+1000)+\frac{1}{10}f_{k+1}(0) & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

5

voor $k=0,1$.

~~$f_0(x) = m$~~

(d)

$$f_1(0) = \max \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{10}f_2(250)+\frac{3}{10}f_2(500)+\frac{2}{10}f_2(1000)+\frac{1}{10}f_2(0) \end{cases}$$

5

$$= \max \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{10}\left(\frac{9}{10}\cdot 250+450\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{9}{10}\cdot 500+450\right)+\frac{2}{10}\left(\frac{9}{10}\cdot 1000+450\right)+\frac{1}{10}\cdot 450 \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} 0 & [\text{stop}] \\ 855 & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

(3)

$$= 855 \quad [\text{doorgaan}]$$

$$f_1(4000) = \max \begin{cases} 4000 \\ \frac{4}{10}\left[\frac{9}{10}\cdot 4250+450\right]+\frac{3}{10}\cdot 4500+\frac{2}{10}\cdot 5000+\frac{1}{10}\cdot 450 = 4105 \end{cases}$$

$$= 4105 \quad [\text{doorgaan}]$$

3

$$f_1(4250) = \max \begin{cases} 4250 & [\text{stoppen}] \\ \frac{4}{10}[4500] + \frac{3}{10} \cdot 4750 + \frac{2}{10} \cdot 5250 + \frac{1}{10} \cdot 450 = 4320 & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

$$f_1(4250) = 4320 \; [\text{doorgaan}]$$

$$f_1(4750) = \max \begin{cases} 4750 & [\text{stoppen}] \\ \frac{4}{10} \cdot 5000 + \frac{3}{10} \cdot 5250 + \frac{2}{10} \cdot 5750 + \frac{1}{10} 450 = 4770 & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

$$= 4770 \; [\text{doorgaan}]$$

$$f_0(3750) = \max \begin{cases} 3750 & [\text{stoppen}] \\ \frac{4}{10} f_1(4000) + \frac{3}{10} f_1(4250) + \frac{2}{10} f_1(4750) + \frac{1}{10} f_1(0) & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

1

$$= \max \begin{cases} 3750 \\ \frac{4}{10} \cdot 4105 + \frac{3}{10} \cdot 4320 + \frac{2}{10} \cdot 4770 + \frac{1}{10} \cdot 855 = 3977.5 \end{cases}$$

$$= 3977.5$$

Het verwachte eindbedrag bedraagt 3977.5.
De optimale politiek is om door te spelen t/m de 2^e beurt en vervolgens te stoppen indien het verdiende bedrag tenminste 4500 bedraagt en anders door te gaan met de 3^e beurt.

1

13

Opgave 2.

(a)

$$f(\text{goed}) = \max \begin{cases} \overbrace{\tfrac{1}{2} \times 9 + \tfrac{1}{2} \times 3}^{6} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} f(\text{goed}) + \tfrac{1}{2} f(\text{slecht})\right] & [\text{niet adv.}] \\ \underbrace{\tfrac{8}{10} \times 4 + \tfrac{2}{10} \times 4}_{4} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{8}{10} f(\text{goed}) + \tfrac{2}{10} f(\text{slecht})\right] & [\text{adv}] \end{cases}$$

6

$$f(\text{slecht}) = \max \begin{cases} \underbrace{\tfrac{2}{5} \times 3 + \tfrac{3}{5} \times (-7)}_{-3} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{5} f(\text{goed}) + \tfrac{3}{5} f(\text{slecht})\right] & [\text{geen res.}] \\ \underbrace{\tfrac{7}{10} \times 1 + \tfrac{3}{10} \times (-19)}_{-5} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{7}{10} f(\text{goed}) + \tfrac{3}{10} f(\text{slecht})\right] & [\text{res}] \end{cases}$$

(b) Er zijn vier stationaire politieken: met beslissingsregels

5 [niet adv., geen res.], [niet adv., res.],

[adv., geen res.], [adv., res.].

(c) / Stel $f_1(\text{goed}) = f_1(\text{slecht}) = 0$.

$$f_2(\text{goed}) = \max \begin{Bmatrix} 6 & [\text{niet adv}] \\ 4 & [\text{adv}] \end{Bmatrix} = 6$$

3

$$f_2(\text{slecht}) = \max \begin{Bmatrix} -3 & [\text{geen res.}] \\ -5 & [\text{res.}] \end{Bmatrix} = -3$$

$$f_3(\text{goed}) = \max \begin{Bmatrix} 6 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} \times 6 + \tfrac{1}{2} \times (-3)\right] \\ 4 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{8}{10} \times 6 + \tfrac{2}{10} \times (-3)\right] \end{Bmatrix} = 6\tfrac{3}{4}$$

3

$$f_3(\text{slecht}) = \max \begin{Bmatrix} \cancel{6}\, -3 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{5} \times 6 + \tfrac{3}{5} \times (-3)\right] \\ -5 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{7}{10} \times 6 + \tfrac{3}{10} \times (-3)\right] \end{Bmatrix} = -2\tfrac{7}{10}$$

(d) Beschouw de stationaire politiek met als beslisregel

[adv. , geen res.] := π

$$V_\pi(\text{goed}) = 4 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{8}{10}V_\pi(\text{goed}) + \tfrac{2}{10}V_\pi(\text{slecht})\right]$$

$$V_\pi(\text{slecht}) = -3 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{5}V_\pi(\text{goed}) + \tfrac{3}{5}V_\pi(\text{slecht})\right]$$

'waardebepaling'

3

Oplossen van deze vergelijkingen geeft:

$V_\pi(\text{goed}) = 6\tfrac{1}{4}$ en $V_\pi(\text{slecht}) = -2\tfrac{1}{2}$

De 'verbeteringsstap' geeft:

toestand 'goed':

$$\max\begin{cases} 6 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\times\tfrac{25}{4} + \tfrac{1}{2}\times\left(-\tfrac{5}{2}\right)\right] & [\text{niet adv.}] \\ 4 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{8}{10}\times\tfrac{25}{4} + \tfrac{2}{10}\times\left(-\tfrac{5}{2}\right)\right] & [\text{adv.}] \end{cases}$$

3

$$= \max\begin{cases} 6\tfrac{15}{16} & [\text{niet adv.}] \longleftarrow ! \\ 6\tfrac{1}{4} & [\text{adv.}] \end{cases}$$

In toestand 'goed' moet de beslissing gewijzigd worden, dus is de startpolitiek π niet optimaal.

~~Het is niet meer nodig de toestand 'slecht' te onderzoeken!~~

toestand 'slecht'

$$\max\begin{cases} -3 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{5}\times\tfrac{25}{4} + \tfrac{3}{5}\times\left(-\tfrac{5}{2}\right)\right] & [\text{geen res.}] \\ -5 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{7}{10}\times\tfrac{25}{4} + \tfrac{3}{10}\times\left(-\tfrac{5}{2}\right)\right] & [\text{res.}] \end{cases}$$

$$= \max\begin{cases} -2\tfrac{1}{2} & [\text{geen res.}] \longleftarrow ! \\ -3\tfrac{13}{16} & [\text{res.}] \end{cases}$$

1 sdrehgi

vervolg 3

In toestand 'slecht' wordt de beslissing niet gewijzigd.

De stationaire verbetering die vervolgens wordt onderzocht is [~~geen~~ niet adv., geen res.].

(e) min $x_1 + x_2$

z.d.d.

$$x_1 \geq 6 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \qquad 3x_1 \geq 24 + x_2 \quad *$$

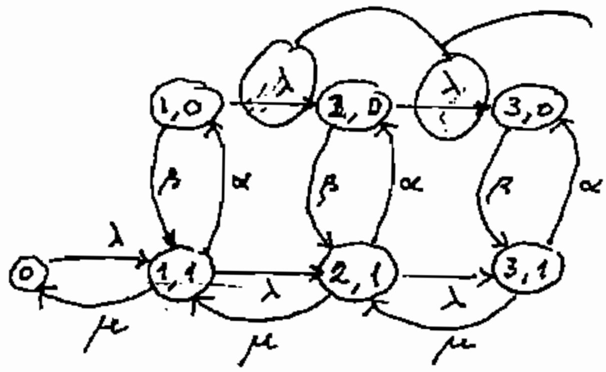
$$x_1 \geq 4 + \frac{4}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \qquad 6x_1 \geq 40 + x_2$$

$$x_2 \geq -3 + \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 \qquad 7x_2 \geq -30 + 2x_1 \quad *$$

$$x_2 \geq -5 + \frac{7}{20}x_1 + \frac{3}{20}x_2 \qquad 17x_2 \geq -100 + 7x_1$$

(B)

Opg. 3

(a) 

−2

7

$(i,0)$ = i # in systeem, server in reparatie

$(i,1)$ = i # „ „ , „ werkt

(b)

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_{11} & (1) \\ (\lambda+\mu+\alpha) P_{11} = \lambda P_0 + \beta P_{10} + \mu P_{21} & (2) \\ (\lambda+\beta) P_{10} = \alpha P_{11} & (3) \\ (\lambda+\mu+\alpha) P_{21} = \lambda P_{11} + \beta P_{20} + \mu P_{31} & (4) \\ (\lambda+\beta) P_{20} = \alpha P_{21} + \lambda P_{10} & (5) \\ (\mu+\alpha) P_{31} = \lambda P_{21} + \beta P_{30} & (6) \\ \beta P_{30} = \lambda P_{20} + \alpha P_{31} & (7) \end{cases}$$

(4)

(1) $P_{11} = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \xrightarrow{(3)} P_{10} = \frac{\alpha}{\lambda+\beta} \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_0$

8

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow \lambda P_{11} + \lambda P_{10} = \mu P_{21}$

$$\rightarrow P_{21} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{\alpha}{\lambda+\beta} P_0 = \left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

(5): $$P_{20} = \frac{\alpha}{\lambda+\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left\{\frac{\lambda}{\lambda+\beta} + \frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\right\} P_0$$

(7)

(4) + (7) : $\mu P_{31} = \lambda P_{20} + \lambda P_{21}$

(7/1)

$$P_{31} = \left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \frac{\alpha}{\lambda+\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P$$

$$= \left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$(7):\quad P_{30} = \frac{\lambda}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \frac{\lambda}{\beta}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\mu}P_0$$

$$+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

P_0 volgt uit:

2

$$P_0\Big\{1+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(\frac{\alpha}{\lambda+\beta}+1\right)+\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\mu}+\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

$$+\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\frac{\lambda}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

$$+\frac{\lambda}{\beta}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\Big\} = 1$$

(c) $\mu(P_{11}+P_{21}+P_{31})$

2 $\mu(P_{11}+P_{21}+P_{31}) = \lambda P_0 + \lambda(P_{10}+P_{11}) + \lambda(P_{20}+P_{21})$

(d)

2 $\cancel{\overline{W} = \frac{(P_{20}+P_{21}) + 2(P_{30}+P_{31})}{\mu(P_{11}+P_{21}+P_{31})}}$ $\left(\text{ook goed: } \cancel{\frac{P_{21}+2(P_{20}+P_{31})+3P_{20}}{\mu(P_{11}+P_{21}+P_{31}}}\right)$

$\overline{N} = 2(P_{20}+P_{21}) + 3(P_{30}+P_{31}) + (P_{10}+P_{11})$

2 (e) $P_{11}+P_{21}+P_{31}$

2 (f) $1-P_0-P_{11}-P_{21}-P_{31} = P_{10}+P_{20}+P_{30}$

2 (g) $1-e^{-\lambda t}$

Opgave 4

(a) stroomvergelijkingen

3

$$\lambda_1 = \gamma_1$$
$$\lambda_2 = p\,\lambda_1$$
$$\lambda_3 = (1-p)\,\lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2$$
$$\lambda_4 = \tfrac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_3$$

oplossing

3

$$\lambda_1 = \gamma_1$$
$$\lambda_2 = p\,\gamma_1$$
$$\lambda_3 = \left[(1-p) + \tfrac{1}{3}p\right]\gamma_1 = \left[1 - \tfrac{2}{3}p\right]\gamma_1$$
$$\lambda_4 = \tfrac{2}{3}p\,\gamma_1 + \left[1-\tfrac{2}{3}p\right]\gamma_1 = \gamma_1$$

(b) netwerk stationair als $\lambda_i < \mu_i$, $i = 1,2,3,4$

4

dus
$$\gamma_1 < 1$$
$$p\gamma_1 < 2$$
$$\left[1-\tfrac{2}{3}p\right]\gamma_1 < 3$$

aangezien $0 \le p \le 1$ is stationariteitsvoorw. $\gamma_1 < 1$

(c) $P(n_1,n_2,n_3,n_4) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}(1-\rho_3)\rho_3^{n_3}(1-\rho_4)\rho_4^{n_4}$

4 met $n_1,n_2,n_3,n_4 \geq 0$

en $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ $i=1,2,3,4.$

(d) N_i s.v. # klanten bij station i

$\mathbb{E}N_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$

4 V_i s.v. verblijftijd in station i

$\mathbb{E}V_i = \frac{\mathbb{E}N_i}{\lambda_i}$ (Little)

aankomstproces is bij ieder station een Poissonproces en wel met intensiteit λ_i bij station i

(e) V = s.v. verblijftijd in netwerk

alle klanten gaan door station 1
fractie p door station 2
2 fractie $1-p+p\cdot\frac{1}{3}$ door station 3
alle klanten gaan door station 4

$\mathbb{E}V = \mathbb{E}V_1 + p\,\mathbb{E}V_2 + (1-\frac{2}{3}p)\mathbb{E}V_3 + \mathbb{E}V_4$

of gebruik Little : $\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}N_1+\mathbb{E}N_2+\mathbb{E}N_3+\mathbb{E}N_4}{\gamma_1}$

Opgave 1

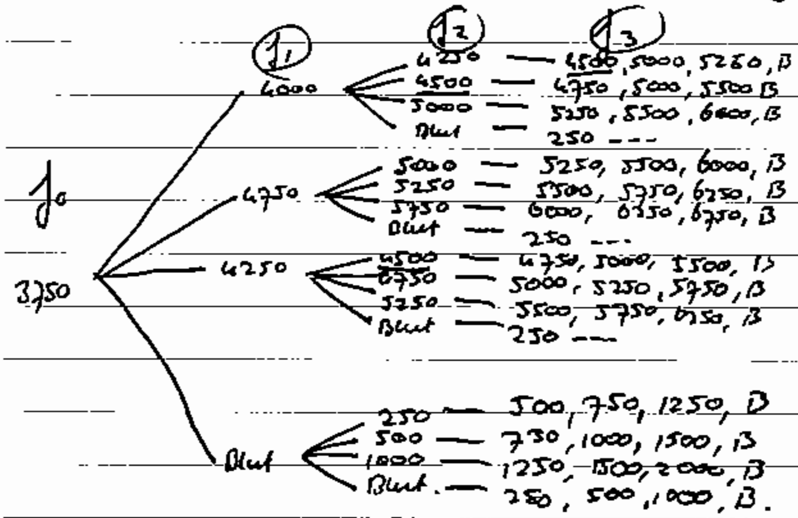
a.) fasen $n = 0, 1, 2, 3$ beurten
toestanden $i = \{0, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 1500, 1750, 2000, \cancel{2250}, \cancel{2500}, 3000, 4000, 4250, 4500, 4750, 5000, 5250, 5500, 5750, 6000, 6250, 6750\}$
beslissing d = stoppen (0) of doorgaan (1).

$f_0(i) = \{3750\}$

$f_1(i) = \{0, 4000, 4250, 4750\}$

$f_2(i) = \{0, 250, 500, 1000, 4250, 4500, 4750, 5000, 5250, 5750\}$

$f_3(i) = \{0, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, \cancel{2250}, \cancel{4500}, 4500, 4750, 5000, 5250, 5500, 5750, 6000, 6250, 6750\}$



b.) ① Ga je in de drie beurten niet blut dan is het laagste bedrag wat je kunt verdienen 4500. Alg: na 3e beurt spel afgelopen en dus is x in $f_3(x)$ resultaat.

② kans dat je (0,4 + 0,3 + 0,2) = 0,9 dat je bedrag in fase 2 minimaal belandt in f_3 + een groei van je winst/bedrag van gemiddeld (0,4.250 + 0,3.500 + 0,2.1000) = 450

b) Per definitie geldt

$$f_2(x) = \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} f_3(x+250) + \frac{3}{10} f_3(x+500) + \frac{2}{10} f_3(x+1000) + \frac{1}{10} f_3(0) & [\text{doorg}] \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} x \\ \frac{4}{10}(x+250) + \frac{3}{10}(x+500) + \frac{2}{10}(x+1000) + \frac{1}{10} \cdot 0 \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ 0{,}9x + 450 & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

Dus $f_2(x) = x$ voor $x \geq 0{,}9x + 450 \Rightarrow x \geq 4500.$

$\quad\;\; " \;= 0{,}9x + 450$ voor $x \leq 4500.$

Gemiddelde opbrengst van doorgaan bedraagt: $450 - \frac{1}{10}x$
alleen voordelig als dit niet negatief is, dus $x \geq 4500.$

) $f_3(x) = x, \quad x \geq 4500$

$f_2(x) = 0{,}9x + 450, \quad x \leq 4500$

$$f_1(x) = \begin{cases} x \\ \frac{4}{10} f_2(x+250) + \frac{3}{10} f_2(x+500) + \frac{2}{10} f_2(x+1000) + \frac{1}{10} f_2(0) \end{cases}$$

$$f_0(x) = \begin{cases} x \\ \frac{4}{10} f_1(x+250) + \frac{3}{10} f_1(x+500) + \frac{2}{10} f_2(x+1000) + \frac{1}{10} f_2(0) \end{cases}$$

d. $f_2(0) = 450$

$f_2(250) = 675$

$f_2(500) = 900$

$f_2(1000) = 1350$

$f_2(4250) = \begin{cases} 4250 \\ 4275^* \end{cases}$ $\quad f_2(x) = 0{,}9x + 450 \quad \leq 4500$

$f_2(4500) = \begin{cases} 4500 \\ 4500 \end{cases}$ $\quad f_{1/2}(x) = x \quad \geq 4500$

$f_2(4750) = \begin{cases} 4725 \\ 4750 \end{cases}$

doe je door recursieve betrekking uit te schrijven doe je het automatisch goed door maximalisatie.

$f_2(5000) = 5000$

$f_2(5750) = 5750$

$f_1(\cancel{250}\,0) = \begin{cases} 0 \\ 0.4\, f_2(250) + 0.3\, f_2(500) + 0{,}2\, f_2(1000) + \frac{1}{10} \cdot f_2(0). \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 \\ .4 \cdot 675 + .3 \cdot 900 + .2 \cdot 1350 + .1 \cdot 450 = 855^* \end{cases}$ [doorgaan]

$f_1(4000) = \begin{cases} 4000 \\ .4 \cdot f_2(4250) + .3\, f_2(4500) + .2\, f_2(5000) + .1\, f_2(0) \end{cases}$

$= \begin{cases} 4000 \\ .4 \cdot 4275 + .3 \cdot 4500 + .2 \cdot 5000 + .1 \cdot 450 = 4105^* \end{cases}$

$f_1(4250 = \begin{cases} 4250 \\ 4320^* \end{cases}$

$f_1(4750) = \begin{cases} 4750 \\ 4770^* \end{cases}$

$$f_0(3750) = \begin{cases} 3750 \\ 0{,}4\, f_1(4000) + 0{,}3\, f_1(4250) + 0{,}2\, f_1(4750) + 0{,}1\, f_1(0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3750 \\ 1642 + 1296 + 954 + 85{,}5 = 3977{,}5^* \text{ [doorgaan]}. \end{cases}$$

Optimale politiek
① → doorgaan kijken bij f_0
② → doorgaan ~~(zelfs~~ kijken bij f_1
③ → stoppen voor $x \geq 4500$.

Want (als je uitschrijft, wat ik dus niet heb gedaan..

$$f_2(4250) = \max \begin{cases} 4250 \\ 4295^* \end{cases}$$

$$f_2(4500) = \max \begin{cases} 4500 \\ 4500 \end{cases}$$

$$f_2(4750) = \max \begin{cases} 4750^* \text{ [Stop]} \\ 4725 \end{cases}$$

$$f_2(5000) = \max \begin{cases} 5000^* \text{ [STOP]}. \\ 4956 \end{cases}$$

Opgave 2.

a)

i = toestand → goed; slecht.

d = beslissing → niet adv / adv & geen res. / res.

N \ N+1 zonder adv	goed	slecht
goed	$1/2$	$1/2$
slecht	$2/5$	$3/5$

N \ N+1	goed	slecht
goed Adv.	$8/10$	$2/10$
slecht res	$7/10$	$3/10$

→ is geen beslissing

let op met aandele vraag: 0 of 1 (aandeel is beurt of niet.) en 100 of 200 (prijs gegeven door markt) } onafh. prijs.

hier: adv of niet / res of niet → is beslissing niet hier plaatsen.
goed of slecht (gegeven door markt)

$$V(i) = \max\{e(i,d) + \alpha \sum p(j|i,d)\, V(j)\}$$ Alg. opt. verg.

$$V(goed) = \begin{cases} \overbrace{\frac{1}{2}\times 9 + \frac{1}{2}\times 3}^{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V_{goed} + \frac{1}{2}V_{slecht}\right) & \text{[niet adv.]} \\ \underbrace{\frac{8}{10}\times 4 + \frac{2}{10}\times 4}_{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{10}V_{goed} + \frac{3}{10}V_{slecht}\right) & \text{[Adv.]} \end{cases}$$

$$V(slecht) = \begin{cases} \overbrace{\frac{2}{5}\times 3 + \frac{3}{5}\times -7}^{-3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}V_{goed} + \frac{3}{5}V_{slecht}\right) & \text{[geen research]} \\ \underbrace{\frac{7}{10}\times 1 + \frac{3}{10}\times -19}_{-5} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{10}V_{goed} + \frac{3}{10}V_{slecht}\right) & \text{[research]} \end{cases}$$

b) uit A volgt [Niet Adv, geen research]
verder: [Niet Adv, research]
[Adv, geen research]
[Adv, research]

c.) $V_1(\text{goed}) = V_1(\text{slecht}) = 0$

$$V_2(\text{goed}) = \max \begin{cases} 6^{*} & [\text{niet adv}] \\ 4 \end{cases}$$

$$V_2(\text{slecht}) = \max \begin{cases} -3^{*} & [\text{geen res.}] \\ -5 \end{cases}$$

$$V_3(\text{goed}) = \max \begin{cases} 6 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot -3\right) = 6\frac{3}{4}^{*} & [\text{niet adv}] \\ 4 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{10}\cdot 6 + \frac{2}{10}\cdot -3\right) = 6\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$V_3(\text{slecht}) = \max \begin{cases} -3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cdot 6 + \frac{3}{5}\cdot -3\right) = -2{,}7^{*} & [\text{geen res}]. \\ -5 + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{10}\, 6 + \frac{3}{10}\cdot -3\right) = -3{,}35 \end{cases}$$

$$\left[V_4(\text{goed}) = \max. \begin{cases} 6 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot -2{,}7\right) = \\ 4 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{10}\cdot 6\frac{3}{4} + \frac{2}{10}\cdot -2{,}7\right) = \end{cases}\right]$$ te veel!

d.) Politiek → [adv, geen research]

① $\cancel{V_\pi(\text{goed}) = \frac{1}{2}\; 6 + \frac{1}{4} V_{\text{goed}} + \frac{1}{4} V_{\text{slecht}}.}$

$\cancel{\frac{3}{4} V(\text{goed}) = 6 + \frac{1}{4} V_{\text{slecht}}.}$

$\cancel{V(\text{goed}) = 8 + \frac{1}{3} V_{\text{slecht}}.}$

$$V_{\text{goed}} = 4 + \frac{4}{10} V_{\text{goed}} + \frac{1}{10} V_{\text{slecht}}$$

$$\frac{6}{10} V_{\text{goed}} = 4 + \frac{1}{10} V_{\text{slecht}}$$

$$V_{\text{goed}} = 6\frac{2}{3} + \frac{1}{6} V_{\text{slecht}}.$$

$$V(\text{slecht}) = -3 + \frac{2}{10} V_{\text{goed}} + \frac{3}{10} V_{\text{slecht}}$$

$$\frac{7}{10} V(\text{slecht}) = -3 + \frac{2}{10} V_{\text{goed}}.$$

$$V_{\text{slecht}} = -\frac{30}{7} + \frac{2}{7} V_{\text{goed}}.$$

$$V_{\text{goed}} = 6\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{30}{7} + \frac{2}{7} V_{\text{goed}}\right)$$

$$V_{\text{goed}} = 6\frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{1}{21} V_{\text{goed}}.$$

$$\frac{20}{21} V_{\text{goed}} = 6\frac{2}{3} - \frac{5}{7}$$

$$V_{\text{goed}} = 6\frac{1}{4}$$

$$V_{\text{slecht}} = -\frac{30}{7} + \frac{2}{7}\cdot 6\frac{1}{4}$$

$$= -2{,}5.$$

13

d) Twee - iteraties: met $U_{slecht} = -2{,}5$ en $U_{goed} = 6\frac{1}{4}$.

$$V_1 g = \begin{cases} 6 + \frac{1}{4} \cdot 6\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot -2{,}5 = 111/16^{*} & \text{[Niet Adv.]} \leftarrow \text{blijft gelijk} \\ 4 + \frac{4}{10} \cdot 6\frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cdot -2{,}5 = 6\frac{1}{4} & \text{[Adv.]} \end{cases}$$

A

$$V_1 s = \begin{cases} -3 + \frac{1}{5} \cdot 6\frac{1}{4} + \frac{3}{10} \cdot -2{,}5 = -2{,}5^{*} \leftarrow & \text{[geen res.]}. \text{ Nieuwe uitkomst} \\ -5 + \frac{7}{20} \cdot 6\frac{1}{4} + \frac{3}{20} \cdot -2{,}5 = -57/16 \; -3{,}5 & \text{[res.]} \end{cases}$$

$V_1\, g = 111/16 \quad U_2\, s =$

~~$V_2(g)$~~

~~$V_2(s)$~~

↳ dus [Niet adv., geen res.] ≠ [Adv., geen res.].

Niet optimaal — is volgende politiek onderzoek

↓

niet goed.

[Niet Adv, ?] = [Niet Adv. ?]

dus beslissing niet Adv is goed.

onderzoek [Niet adv; geen res] A

$x_1 = U_{goed} \quad x_2 = U_{slecht}$.

e. MIN $x_1 + x_2$

z.d.d.

$$x_1 \geq 6 + \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \rightarrow 3x_1 \geq 24 + x_2^{*}$$
$$x_1 \geq 4 + \frac{4}{10} x_1 + \frac{1}{10} x_2 \rightarrow 6x_1 \geq 40 + x_2.$$
$$x_2 \geq -3 + \frac{1}{5} x_1 + \frac{3}{10} x_2 \rightarrow 7x_2 \geq -30 + 2x_1^{*}$$
$$x_2 \geq -5 + \frac{7}{20} x_1 + \frac{3}{20} x_2 \rightarrow 17x_2 \geq -100 + 7x_1$$

ExxonMobil

Opgave 3

M/M/1/2 zie a/b opgave 3 Tentamen woensd. 11-aug. 2004.

Opgave 4

a) $((1-p)+p)\rho_1 = \gamma_1 \Rightarrow \rho_1 = \gamma_1$

$(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})\rho_2 = p\rho_1 \Rightarrow \rho_2 = p\rho_1$

$\rho_3 = (1-p)\rho_1 + \frac{1}{3}\rho_2 \Rightarrow \rho_3 = \rho_1 - p\rho_1 + \frac{1}{3}p\rho_1 \Rightarrow \rho_3 = \rho_1 - \frac{2}{3}p\rho_1$

$\rho_4 = \frac{2}{3}\rho_2 + \rho_3 \Rightarrow \rho_4 = p\rho_1 + \rho_1 - p\rho_1 \Rightarrow \rho_4 = \rho_1$

b) $\frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$ $i=1,2,3,4 \Rightarrow$ dan stationair

$\rho_1 = \rho_4$: $\frac{\gamma_1}{1} < 1$ ~~idem voor $i=4$~~

ρ_2: $\frac{p\gamma_1}{2} < 1 \Rightarrow p\gamma_1 < 2$

ρ_3: $\frac{\gamma_1 - \frac{2}{3}p\gamma_1}{3} < 1 \Rightarrow \gamma_1 - \frac{2}{3}p\gamma_1 < 3$

aangezien $0 \le p \le 1$ geldt $\gamma_1 < 1$

c) $P(n_1\, n_2\, n_3\, n_4) = \prod_{i=1}^{4} P_i(k_i)$

$P_i(k_i) = \left(1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^k$ $k_i = 1,2,3,4$ mits $\frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$

Dus $(1-\gamma_1)(\gamma_1)^1 \times (1-p\gamma_1)(p\gamma_1)^2 \times (1-(\gamma_1 - \frac{2}{3}p\gamma_1))(\gamma_1 - \frac{2}{3}p\gamma_1)^3 + (1-\gamma_1)(\gamma_1)^4$

d) $EN = \lambda EW$ of $EN = \lambda EF$

Mean Value Analysis? $\Rightarrow$ Nee geen gesloten netwerk.

Dus $EN_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$ $EF_i = \frac{EN_i}{\lambda_i}$

e.) $EF = \frac{EN_1 + EN_2 + EN_3 + EN_4}{\lambda_1}$

$\hookrightarrow \gamma_1$

14

Tentamen ORII, november 2002,

Eindcijfer= (totaal aantal behaalde punten +10)/10

Er zijn 4 opgaven.

Uitwerking

(14)

Tentamen ORII, 14 (?) november 2002, tijd: (?)
Eindcijfer= (totaal behaalde punten +10)/10

Opgave 1: 20 p.

Een klein bio-medisch hightech bedrijfje produceert Renspeed voor paarden, die aan een paarden race deelnemen. Dit middel is biologisch afbreekbaar, officieel toegelaten, mits door een veearts toegediend en volgens ingewijden werkt het fantastisch. De vraag naar de betreffende ampullen is als volgt:

	maandag	dinsdag	woensdag	donderdag	vrijdag
D=1	0.7	0.7	0.7	0.7	
D=2	0.3	0.3	0.3	0.3	
D=3					0.2
D=4					0.6
D=6					0.2

Het bedrijf heeft een maximale productie capaciteit van 3 ampullen per dag. Als op een dag een batch geproduceerd wordt, neemt dat een de gehele dag in beslag. Daarna moet aan het begin van de volgende dag de batch getest worden. Dat kost 4 uur tijd. Met kans 0.1 moet de gehele batch worden vernietigd en met kans 0.9 is de batch geschikt voor verkoop. De productie kosten van een batch van omvang X zijn inclusief testen:

	X=0	X=1	X=2	X=3
kosten	0	200	250	280

Het product kan nadat het getest is op voorraad worden gehouden door het zeer diep gekoeld te bewaren, voor aflevering moet het dan op kamer temperatuur worden gebracht. Dit invries / ontdooi proces kost nauwelijks tijd. Als een batch uit voorraad wordt gehaald, wordt deze alsnog een keer getest op dezelfde wijze als een productierun en dit brengt alsnog een risico op afkeur van deze batch met zich mee van 0.2. Verdere voorraadkosten zijn verwaarloosbaar. De voorraad ruimte is beperkt tot 4 ampullen. Ampullen kunnen na ontdooiing niet ten tweede male worden ingevroren. De leverantie aan een klant gebeurt per snelpost aan het eind van de dag. Indien de test uitslag goed is kunnen voor leverantie dus de productierun van de vorige dag en de batch uit voorraad van dezelfde dag worden gebruikt. Het uitgeleverde product is dan alleen de volgende dag bruikbaar. Als men niet kan leveren koopt men vliegensvlug het product bij een concurrent in en levert de zelfde avond nog na. Dit brengt naleveringskosten van 1000 per stuk met zich mee.

Het bedrijf is in het weekend gesloten. Daarom wordt de productie run van vrijdag op vrijdag avond / nacht getest en indien geschikt bevonden aan de voorraad toegevoegd, voor zover de ruimte dat toelaat.
Aan het begin van de maandag morgen heeft men 2 ampullen op voorraad. Bij de productie planning houdt men als regel aan dat de voorraad op zaterdag morgen gewaardeerd wordt tegen de verwachte nalever kosten van de volgende maandag als men zoveel mogelijk aan de vraag voldoet.

(a) Als toestandskarakterisering aan het begin van een dag werkt men met de begin voorraad I en de omvang van de productie run Y van de vorige dag, die nog getest moet worden. Als beslissingsvariabelen hanteert men de omvang van de productierun voor de huidige dag X en de omvang van de batch B die men uit de voorraad haalt.
- Welke toestanden zijn er mogelijk op dinsdag morgen?
- Beschouw dinsdagmorgen met I=1, Y=3 en X=2, B=1.
  - Wat verstaat u onder de verwachte directe kosten en hoe hoog zijn die hier?
  - Wat zijn respectievelijk de overgangskansen naar de volgende toestanden op woensdagmorgen: (1) I'=1, Y'=2 en (2) I'=0, Y'=0 en (3) I'=0, Y'= 2

(b) Hoe definieert u de waarde functie $F_n(I,Y)$ dit geval?
Formuleer een recursie relatie voor deze waarde functie. Hoe vind u hiermee de optimale beslissingsstrategie? Gebruik hierbij in het algemene geval voor de directe kosten de notatie C(Y,X,B) en voor de transitie kansen de notatie $p_n(I',Y' \mid I,Y;X,B)$. Geef de volledige recursie relatie met de directe kosten kosten en overgangskansen in getallen waaraan $F_2(1,3)$ moet voldoen.

(c) Bereken de eindwaarden $F_6(I,0)$ voor de recursie. Welke beslissing neemt u in de situatie dat op vrijdag ochtend de toestand I=0, Y=3 optreedt

Antwoorden: 2.

a.
- $I=0,\ 1,2$ en $Y=0,1,2,3$
- $C(3,2,1)=250+0.02*\{0.7*1000+0.3*2000\}+0.1*(1-0.2)*0.3*1000+0.2*(1-0.1)*0+(1-0.2)*(1-0.1)*0=300$
- (1) $0.9*0.8*0.3+0.9*0.2*0.7=0.342$ (2) 0, want per def. $Y'=2$ (3) 0.1

b.
- $F_n(I,Y)=\min\limits_{0\le B\le 1,\,0\le X\le 3}\{C(Y,X,B)+\Sigma\, p_n(I',Y' \mid I,Y;X,B).\ F_n(I',Y')\}$
- $F_2(1,3)=\min\{$ (B=0,X=0): (0.7·1000+0.3·2000)
  $0.1*1300+0.9*0.7*F_3(3,0)+0.9*0.3*F_3(2,0)+0.1*F_3(1,0)$
  (B=0,X=1):
  $0.1*1300+200+0.9*0.7*F_3(3,1)+0.9*0.3*F_3(2,1)+0.1*F_3(1,1)$
  (B=0,X=2):
  $0.1*1300+250+0.9*0.7*F_3(3,2)+0.9*0.3*F_3(2,2)+0.1*F_3(1,2)$

$(B=0,X=3)$:
$0.1*1300+280+0.9*0.7*F_3(3,3)+0.9*0.3*F_3(2,3)+0.1*F_3(1,3)$
$(B=1,X=0)$:
$0.1*0.8*0.3*1000+0.1*0.2*1300+0.9*0.7*F_3(3,0)+0.9*0.3*$
$F_3(2,0)+0.1*F_3(1,0)$
$(B=1,X=1)$:
$0.1*0.8*0.3*1000+0.1*0.2*1300+200+0.9*0.7*F_3(3,1)+0.9*0.3*$
$F_3(2,1)+0.1*F_3(1,1)$
$(B=1,X=2)$:
$0.1*0.8*0.3*1000+0.1*0.2*1300+250+0.9*0.7*F_3(3,2)+0.9*0.3*$
$F_3(2,2)+0.1*F_3(1,2)$
$(B=1,X=3)$:
$0.1*0.8*0.3*1000+0.1*0.2*1300+280+0.9*0.7*F_3(3,3)+0.9*0.3*$
$F_3(2,3)+0.1*F_3(1,3)$
}

c.

$F_6(0,0)=1300$
$F_6(1,0)=0.9*0.3*1000+0.1*1300=400$
$F_6(2,0)=0.1*1300=130$
$F_6(3,0)=0.1*1300=130$
$F_6(4,0)=0.1*1300=130$

Beslissing: $B=0$ *en* $X=2$, *want nalever kosten onafhankelijk van* X *en productie kosten van een run ter lengte* $X+F_6(X,0)$ *minimaal voor* $X=2$.

Opgave 2: 20 p.

Een wasmiddelenfabrikant maakt regelmatig gebruik van marketing-acties, in de vorm van reclame op televisie. De fabrikant weet uit ervaring dat reclamespots de omzet op korte termijn sterk kunnen beïnvloeden. Om precies te zijn: de omzet in week $n+1$ is afhankelijk van de omzet in week n, en eventuele reclamespots in week $n+1$ (zie tabel).

omzet week $n+1$

omzet week *n*	wel reclame: hoog	wel reclame: normaal	wel reclame: laag	geen reclame: hoog	geen reclame: normaal	geen reclame: laag
hoog	0.9	0.1	0	0,6	0,4	0
normaal	0,8	0,2	0	0	0,8	0,2
laag	0,6	0,4	0	0	0,3	0,7

Matrix met overgangskansen

De fabrikant wil onderzoeken wanneer marketing-acties lonend zijn, en wanneer niet. De kosten van reclamespots bedragen 80.000 gulden per week. De verwachte opbrengsten bij een hoge, normale en lage omzet bedragen respectievelijk 160.000, 80.000 en 20.000 gulden per week. Doelstelling is een maximale verwachte verdisconteerde winst over een oneindige tijdshorizon, bij een verdisconteringsfactor van 0,90 per week.

(a) Er is hier sprake van een Markov beslissingsprobleem. Wat definieert u als toestandsruimte en beslissingsruimte?

(b) Maak een tabel 3 bij 2 tabel van de verwachte directe winst *r(i,d)* over de komende week.

(c) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen, waarbij u voor de overgangskansen de notatie *p(j;i,d)* mag gebruiken.

De fabrikant zendt al jarenlang een reclamespots uit op televisie *alleen* als de omzet in de vorige week *laag* was.

(d) Geef de vergelijkingen waaraan de netto contante waarde van deze politiek in elke begin toestand moet voldoen. U mag aannemen dat de oplossing van deze vergelijkingen gegeven wordt door v(1)=840, v(2)=730, v(3)=760. Laat m.b.v. de policy-iteratie methode zien dat de door de fabrikant gehanteerde strategie niet optimaal is.

(d) Geef een LP-formulering waarmee de optimale strategie kan worden bepaald.

Antwoorden:

a. toestand: markt situatie vorige week, beslissing: wel reclame (d=1), geen reclame (d=0)
b.

	Wel reclame	*Geen reclame*
Hoog (i=1)	*152-80=72*	*128*
Normaal (i=2)	*144-80=64*	*68*
Laag (i=3)	*128-80=48*	*38*

b. $V(i)=\max_{d=0,1} \{r(i,d)+0.9*\Sigma p(j;i,d)V(j)\}$

c. $V(1)=128+0.54*V(1)+0.36*V(2)$
$V(2)=68+0.72*V(2)+0.18*V(3)$
$V(3)=48+0.54*V(1)+0.36*V(2)$

i.e

$V(2)=68/0.28+0.18/0.28*V(3)=243+0.64*V(3),$
$V(1)=128/0.46+0.36/0.46*V(2)=270+0.78*V(2)=270+190+0.0.64*0.78*V(3)= 460+0.5*V(3)$
$V(1)=V(3)+80$ *en dus* $V(3)=380/0.5=760$
$V(1)=840$
$V(2)=730$

Policy iteration: voor i=2 : wel reclame: $64+0.72*840+0.18*730=800$ *is dus beter want* >730

d.

min $x+y+z$
ovw: $x\geq 72 +0.81*x+0.09*y$
$x\geq 128+0.54*x+0.36*y$
$y\geq 64+0.72*x+0.18*y$
$y\geq 68+0.72*y+o.18*z$
$z\geq 48+0.54*x+0.36*y$
$z\geq 38+0.27*y+0.49*z$

optimale politiek: waar gelijkheden in de rvw worden aangenomen.

Opgave 3 : 30 p.

Een chique tearoom is gevestigd als annex bij een luxe bakkerij in het oude centrum van de stad. Er zijn 2 tafeltjes, die elk geschikt zijn voor maximaal 2 personen. De tearoom kent 2 typen bezetting van een tafeltje: met een "single" (1 klant) of met een "couple" (2 bij elkaar horende klanten). Er arriveren volgens een Poisson proces gemiddeld 3 "singles" per uur. Evenzo arriveren er volgens een Poisson proces gemiddeld 3 "couples" (dus 2 klanten die bij elkaar horen tegelijkertijd) per uur. Dit zijn potentiële aankomsten in de zin dat de klanten doorlopen als beide tafeltjes bezet zijn. Een "single" heeft een exponentieel verdeelde verblijfsduur met een gemiddelde van 15 minuten. Een "couple" heeft een exponentieel verdeelde verblijfsduur met een gemiddelde van 20 minuten (gemiddeld langer dan "singles" omdat ze converseren). De gemiddelde besteding van een "single" is 8 euro, de gemiddelde besteding van een "couple" is 12 euro.

(a) Benoem de 6 verschillende toestanden waarin deze tearoom zich kan bevinden. Teken het bijbehorende toestandsdiagram.
(b) Leidt de vergelijkingen voor de evenwichtskansen af en los deze op.
(c) Wat is het gemiddeld aantal bezette tafeltjes? Wat is het gemiddeld aantal klanten in de tearoom?
(d) Welk percentage van de potentiële klanten loopt door omdat bij aankomst de beide tafeltjes bezet zijn?
(e) Wat is de gemiddelde omzet per uur van deze tearoom?
(f) Wat is het aantal klanten dat de tearoom per uur gemiddeld bedient? Wat is de gemiddelde verblijftijd van een klant?
(g) Als op een gegeven moment beide tafeltjes bezet zijn met "couples" wat is dan de kans dat er in de komende 10 minuten geen tafeltje vrijkomt? Hoe lang duurt het naar verwachting vanaf dat moment tot er een tafeltje vrijkomt?

Antwoorden:

a. *(0), (s), (c), (ss), (sc), (cc)*

b. $6P_0=4P_s+3P_c$ $\quad 7P_s=3P_{sc}+8P_{ss}$ $\quad 6P_c=4P_{sc}+6P_{cc}$

$8P_{ss}=3P_c+3P_s$ $\quad 7P_{sc}=3P_c+3P_s$ $\quad 6P_{cc}=3P_c+3P_s$

som van de kansen = 1

met enig reken werk $P_{sc}=(8/7)P_{ss}$ *en* $P_{cc}=(8/6)\,P_{ss}$; $P_s=(80/49)\,P_{ss}$ *en* $P_c=(88/42)\,P_{ss}$ *en* $P_0=((320/49+88/14)/6)\,P_{ss}$ *dus*

P_{ss} =1/{1+8/7+8/6+80/49+88/42+320/294+88/84}

c. *(I)* *$1.(P_s+P_c)+2.(P_{ss}+P_{sc}+P_{cc})$*

(II) *$1.P_s+2.P_c+2.P_{ss}+3.P_{sc}+4.P_{cc}$*

d. *$(P_{ss}+P_{sc}+P_{cc}).100\%$*

e. *$(1-(P_{ss}+P_{sc}+P_{cc})).(3.8+3.12)$ euro*

f. *effectieve aankomst van klanten= $(1-(P_{ss}+P_{sc}+P_{cc})).(3+3.2)$*

gem. verblijftijd=

$(1.P_s+2.P_c+2.P_{ss}+3.P_{sc}+4.P_{cc})/\{(1-(P_{ss}+P_{sc}+P_{cc})).(3+3.2)\}$

vanwege Little's wet

g. *exponentiële verdeling met gemiddelde 10 minuten, dus kans op geen vertrek binnen 10 minuten: 1-1/e ; gemiddelde tijd 10 minuten*

Opgave 4: 20 p

Een speelhal kent 3 gecomputeriseerde spelletjes machines waaraan een persoon tegelijk kan spelen. Per uur arriveren van buiten volgens een Poisson proces gemiddeld 24 personen in de speelhal . Elke aankomende klant selecteert met kans 1/3 een van de machines om te beginnen en speelt daar zijn eerste spel. Daarna is het gedrag van een willekeurige klant als volgt: bij afloop van een spel op een bepaalde machine selecteert hij met kans 2/3 een van de andere 2 machines, met evenveel kans voor elk van de machines (1/3 dus), en met kans 1/3 verlaat hij de speelhal. De spelduur op elk van de machines is exponentieel verdeeld met een gemiddelde duur van 90 seconden.

(a) Teken een netwerk diagram voor de stromen in deze situatie en los de bijbehorende stroom vergelijkingen op.
(b) Wat is de bezettingsgraad van elk van de machines?
(c) Wat is de kans dat niemand in de wachtrij staat bij welke machine dan ook?
(d) Wat is de gemiddelde verblijftijd van een bezoeker van de speelhal?
(e) Hoeveel spelletjes doet een klant gemiddeld voordat hij de speelhal weer verlaat?

Antwoorden:

a. stroom vergelijkingen: $\lambda_1=8+(\lambda_2+\lambda_3)/3$

$$\lambda_2=8+(\lambda_1+\lambda_3)/3$$
$$\lambda_3=8+(\lambda_2+\lambda_1)/3$$

dus $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=24$

b. $\rho=24/40=0.6$

c. *elke machine M/M/1 dus kans op geen wachtrij =* $1-\rho+(1-\rho)\rho=0.64$ *voor elk van de machines, kans op geen wachtenden in het systeem als geheel* $=(0.64)^3$

d. *gemiddeld aantal personen in de speelhal =* $3.\ 0.6/(1-0.6)=4.5$ *; dus volgens Little's wet is de gemiddelde verblijftijd: 4.5/24 uur = 7.5 minuut*

e. *gemiddelde verblijftijd per machine = 1.5/24 uur, dus gemiddeld 3 spelletjes.*

(5)

Universiteit Twente

Kenmerk: TW01/T-DW&MP/32/dh

Tentamen Operationele Research II (158006)

~~Woensdag 9 januari 2002, 13.30 – 16.30~~

1. Anand speelt tegen Kramnik twee schaakpartijen. Een gewonnen partij levert 1 punt op, een remise $\frac{1}{2}$ punt. Nadat de twee partijen zijn gespeeld is degene met de meeste punten uiteraard de winnaar. Eindigen beide spelers gelijk, dan wordt net zo lang doorgespeeld totdat één van de twee spelers heeft gewonnen.
In iedere partij kan Anand kiezen uit twee speelwijzen: agressief of behoudend. Speelt hij agressief dan wint hij de partij met kans 0.45 en verliest met kans 0.55. Speelt hij behoudend dan maakt hij remise met kans 0.9 en verliest met kans 0.1. (Er wordt geen onderscheid gemaakt tussen het spelen met de witte of zwarte stukken).
Anand's doel is het maximaliseren van de kans dat hij de winnaar wordt. [De uitkomsten van de opvolgende partijen zijn onderling onafhankelijk, zodat kansen vermenigvuldigd mogen worden].

   (a) Hoe groot is de maximale kans voor Anand om te winnen, indien beide spelers na de twee partijtjes evenveel punten hebben en welke speelwijze moet Anand hiervoor kiezen.

   (b) Bepaal Anand's optimale speelstrategie *m.b.v. dynamische programmering* [Aanwijzing: Kies als toestanden de uitkomsten van de reeds gespeelde partij(en), (indien van toepassing). Bedenk dat de optimale waardefunctie de maximale kans voor Anand is om winnaar te worden gegeven de fase en de toestand.]

   (a) Hoe groot is de maximale kans en wat is de optimale speelwijze in de eerste partij.

2. Iedere zaterdagavond speelt een man poker, zeer tot ongenoegen van zijn vrouw. Als hij haar voorafgaand aan het pokeren uit eten neemt (kosten fl.56,–) zal zij met kans $\frac{7}{8}$ volgende week zaterdag in een goed humeur zijn en met kans $\frac{1}{8}$ in een slecht humeur, ongeacht het humeur dat ze deze zaterdag heeft; neemt hij haar vooraf echter niet uit eten, dan zijn deze kansen, respectievelijk, $\frac{1}{8}$ en $\frac{7}{8}$. Is zij in een slecht humeur en gaat hij niet met haar uit eten, dan gaat ze naar een boetiek en koopt voor fl.200,– nieuwe kleren.

   (a) Geef de optimaliteitsvergelijking(en) in het geval de man de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon wil minimaliseren (disconterings-factor α). Geef de definitie van de optimale waardefunctie, de beslisruimte en de toestandsruimte.

$0,5$

(b) Bepaal de optimale politiek en de optimale waardefunctie m.b.v. politiek-iteratie voor $\alpha = \frac{4}{5}$.

(c) Geef een L.P.-model voor dit probleem en los dit grafisch op. Controleer hiermee het antwoord in (b).

3. Bij een wachtsysteem arriveren groepjes klanten volgens een Poissonproces met intensiteit $\lambda = 3$ groepjes/uur. De groepsgrootte is stochastisch: met kans $p = \frac{1}{2}$ bevat een "groepje" slechts één klant met en met kans $1 - p = \frac{1}{2}$ bestaat een groepje uit 2 klanten.

Het wachtsysteem bezit twee identieke parallelle servers (loketten) en één wachtplaats (er kunnen dus maximaal drie klanten in het syteem zijn). Een arriverend groepje van twee klanten wordt alleen tot het systeem toegelaten mits er plaats is voor beide klanten, anders vertrekken beide klanten onmiddelijk en komen nooit meer terug. Uiteraard zal een individueel arriverende klant (= groepje ter grootte 1) welke het systeem vol aantreft ook verloren gaan.
Klanten worden individueel bediend. De bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $\mu^{-1} = \frac{1}{2}$ uur.

(a) Hoeveel klanten arriveren gemiddeld per uur bij het systeem?

(b) Geef het overgangsintensiteitendiagram, (behorend bij het totaal aantal klanten in het systeem).

(c) Geef de evenwichtsvergelijkingen voor stationaire kansverdeling P_n, $n = 0, 1, 2, 3$, van het aantal klanten in het systeem en los ze op.

De antwoorden op de volgende vragen hoeven niet te worden uitgerekend, maar kunnen uitgedrukt worden in λ, μ, p en de P_n's.

(d) Hoe groot is het gemiddeld aantal klanten dat per uur wordt bediend.

(e) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde wachttijd.

(f) Wat is de verdeling van de lengte van een periode waarin het systeem leeg is. Verklaar uw antwoord.

(g) Met welke intensiteit (klanten/uur) komen klanten het systeem binnen welke in groepjes van 2 arriveren.

1/3

Probabilistic Dynamic Programming (16)

Tentamen OR2

~~Vrijdag 3 december 1999, 9.00-12.30 uur (T&M20.99.134)~~

Opmerkingen vooraf:

1. Gelieve het tentamenbriefje in te vullen, inclusief studentnummer en vakcode.
2. Het gebruik van boeken, syllabi of aantekeningen is niet toegestaan bij dit tentamen.
3. Na afloop is het tentamen in te zien op het secretariaat van OMST (BB-316) tussen 9.00 en 11.00 uur 's morgens (voor zover de secretaresse aanwezig is)

w=3

Opgave 1:

Een onderneming heeft een financial controller, die met slim kasbeheer de ondernemingswinst wil opkrikken. Als instrument hanteert hij beleggingen in 2-maand deposito's van 1 miljoen gulden per stuk. Bij afsluiting wordt de depositorente in zijn geheel vooruit betaald. Er zijn geen afsluitkosten, de rente is 3 % op jaarbasis. Inzet van dit instrument wordt slechts overwogen als er aan het begin van een maand meer dan 1 miljoen gulden in kas is en dan alleen voor het bedrag van boven de 1 miljoen gulden. In geval van een gedurende een maand optredend kastekort wordt een 1- maandlening afgesloten tegen 12 % op jaarbasis, zonder afsluitkosten. De vraag is nu op welk tijdstip hij hoeveel zal beleggen in deposito's. De volgende informatie omtrent kasstromen is bekend.

Per 1 juli is de kas 2 miljoen gulden en op die datum zijn er twee deposito's van 1 miljoen gulden die nog een maand lopen.

Door afloop van projecten zijn de volgende inkomsten gepland in Mfl:

	1 juli	2 aug	3 sep	4 okt	5 nov	6 dec
	4	0	4	2	4	0

i =

Echter er is een dubieuze debiteuren probleem. Elk van de genoemde bedragen is met kans 10 % niet inbaar. Zelf betaalt men personeel en leveranciers perfect op tijd uit aan het eind van de maand en wel:

	2	1	2	2	2	2

u =

a) Ga na dat het verwachte netto ondernemingsresultaat over de beschouwde periode, exclusief rente, gelijk is aan 1.6 miljoen gulden, onafhankelijk van de beleggingspolitiek. $\sum_{n=1}$ kansen $\times 0.9$ $- \sum_{n}$ uitgaven

b) Definieer een toestandsvector (x, y), die de financiële situatie aan het begin van een maand karakteriseert. Welke fasen onderscheidt u in dit beslissingsproces?

c) Wat is de beslissingsvariabele d? Wat is bij gegeven toestand de beslisruimte?

d) Geef een formule voor de verwachte directe renteopbrengsten R(x, y, d, i, u) in een bepaalde maand. Wat is R voor de maand juli als d = 1?

e) Bepaal de overgangskansen $p_n(x', y' | x, y, d)$.

f) Definieer een waardefunctie $f_n(x, y)$ op grond waarvan stochastische DP mogelijk is.

g) Formuleer een recursie relatie voor $f_n(x, y)$. Welke eindwaarden $f_7(x, y)$ zijn van toepassing?

h) Beschrijf de structuur van de optimale beslissingen $d_6(x, y)$ en bepaal $d_6(3, 2)$ en $d_6(2, 3)$.

Markof

onmogelijk!

16

Opgave 2:

Een free-lance consultant heeft te maken met een stochastisch werkaanbod. Hieronder staat in een tabel weergegeven met welke kans hij aan het begin van een week een vraag heeft om een job te doen van een lengte en mét een opbrengst als weergegeven.

[redacted]			
[redacted]	1 wk.	5 kfl.	0.2
	2 wk.	8 kfl.	0.3
	2 wk.	20 kfl	0.4

Het gaat dus om drie onafhankelijke aankomstprocessen met een aankomstkans zoals gegeven. Als een job niet wordt geaccepteerd gaat hij naar de concurrentie. De consultant kan maar één job tegelijk uitvoeren. ~~Als er twee of meer jobs van hetzelfde type op hetzelfde moment worden aangeboden word er dus slechts een van beschouwd.~~ Opbrengsten worden bij afloop van de job betaald. Toekomstige opbrengsten worden met een discountfactor $\rho = 0.95$ per week naar een huidige constante waarde verrekend.
Beschouw het job acceptatieprobleem van deze consultant vanuit een Markov beslissingsmodellen perspectief.

a) Als de consultant vrij is kunt u de toestand karakteriseren met (x_1, x_2, x_3), waarbij $x_i = 0$ of 1, afhankelijk van de beschikbaarheid van een job van type i. Zijn er nog andere toestanden?

b) Wat is de beslissingsruimte $D(x_1, x_2, x_3)$ in de toestand (x_1, x_2, x_3)?
Beredeneer, dat afhankelijk van de beslissing d er een transitie plaatsvindt naar een toestand (z_1, z_2, z_3) die t(d) weken later optreedt. De overgangskans $p(z_1, z_2, z_3)$ hangt niet af van (x_1, x_2, x_3) en d, en t(d) is 1 of 2.

Beschrijf t(d) en $p(z_1, z_2, z_3)$ nader.

Geef een tabel van $p(z_1, z_2, z_3)$ en check dat deze kansen tot 1 optellen.

d c) Definieer een optimale waardefunctie $V(x_1, x_2, x_3)$ en beredeneer dat deze moet voldoen aan de Bellman vergelijking:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \max_{d \in D(x_1, x_2, x_3)} \rho^{t(d)}\{C(d) + \overline{V}\}$$

met C(d) een aan de beslissing d gerelateerde directe opbrengst

$$\text{en } \overline{V} = \sum_{(z_1, z_2, z_3)} p(z_1, z_2, z_3)\, V(z_1, z_2, z_3).$$

Beschrijf C(d) nader.

Geef aan waaraan de waardefunctie in de andere toestanden moet voldoen.

d) Voer één slag value-iteration uit op de Bellman vergelijking startend met $\overline{V}_0 = 400$. (ℓμ)

d) Beredeneer welke beslissing bij een optimale politiek wordt genomen in de toestand (1, 0, 0).

e) Formuleer een LP probleem, waaraan $\overline{V}$ en $V(x_1, x_2, x_3)$ moeten voldoen. Neem als doelstellingsfunctie het minimaliseren van $\overline{V}$.

(16)

Wachttijd : machine repair model.

Opgave 3:

Een continu bedrijf produceert goederen op een 3-tal identieke machines. Per machine is de produktie 1000 stuks per dag. Elke machine is aan storingen onderhevig. Het verhelpen van een storing gebeurt door één monteur. De daarmee gemoeide reparatie tijd kent een exponentiële verdeling met een gemiddelde van 1 dag. Na het verhelpen van een storing is een machine weer als nieuw.
De tijd tot het optreden van een storing vanaf het in gebruik nemen van een gerepareerde machine heeft een exponentiële kansverdeling met een gemiddelde van 4 dagen. Voor het onderhoud zijn 2 gelijkwaardige monteurs beschikbaar.

a) Definieer de 4 toestanden waarin dit systeem zich kan bevinden.

b) Teken een toestandsdiagram waarin de overgangsintensiteiten tussen de verschillende toestanden zijn aangegeven.

c) Bereken de fracties van de tijd waarmee het systeem zich in elk van de toestanden bevindt.

d) Wat is de bezettingsgraad van de onderhoudsafdeling?

e) Wat is het verwachte aantal machines in storing? Wat is de gemiddelde dagproduktie?

f) Wat is de frequentie van optreden van storingen in het systeem als geheel?

g) Formuleer Little's wet voor storingen in het systeem als geheel. Wat is de verwachte doorlooptijd voor het afhandelen van een storing?

h) Welk percentage wachttijd bevat deze doorlooptijd?

OR 2 (3-12-99)

Opg 1.

(a) Exclusief rente, is het verwachte netto ondernemingsresulta…

$0.9\,(4+0+4+1+4+0) - (2+1+2+2+2+2) = 1.6$ Mfl.

(b) Om de toestandsbeschrijving eenvoudig te houden, worden debet- en creditrentes in een apart fonds bijgehouden, zodat de kas steeds eenheden van Mfl bevat. Moet … worden geleend om de uitgave u te betalen, dan wordt de kas aangevuld tot 0.

Aan begin van de maand is de toestand dan gedefinieerd door de toestandsvector (x, y), met

x = # Mfl in kas, na eventuele binnenkomst van uit… 2-maands deposito's, en voor evt. binnenkomen va… projectopbrengsten

y = # uitstaande 2-maands deposito's (staan nog 1 mnd …

De fasen zijn de maandnummers $= \{1, 2, \ldots, 6\}$

(c) De beslissingsvariabele d = # af te sluiten 2-maands depo…

In toestand (x, y) geldt voor de beslissing

$d \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ voor $x = k$ $(k \geq 2)$, $y \geq 0$

[illegible]

$d = 0$ voor $x = 0, 1$ en $y \geq 0$

(d) Ervan uitgaande dat een tekort aan het einde van de maa… na uitbetaling van u wordt geleend en de rente vooruit w… betaald, zodat deze ten laste komt van de uitbetalingsmaa… Wordt de netto rente opbrengst

$0.03d - 0.12 \max\{0, u+d-x-i\}$ met kans 0.9

of

$0.03d - 0.12 \max\{0, u+d-x\}$ met kans 0.1

Dus

$R(x,y,d,i,u) =$

$0.03d - 0.108 \max\{0, u+d-x-i\} - 0.012 \max\{0, u+d-x\}$

Voor juli met $d=1$ geldt $(x=y=2, i=4, u=2)$ dus:

$R(2,2,1,4,2) = 0.03 - 0.108 \max\{0, 3-6\} - 0.012 \max\{0, 3-2\}$

$= 0.018$ Mfl

e) $P_n(y_n + \max\{0, x_n+i_n-d_n-u_n\}, d_n \mid x_n, y_n, d_n) = 0.9$

$P_n(y_n + \max\{0, x_n-d_n-u_n\}, d_n \mid x_n, y_n, d_n) = 0.1$

(f) $f_n(x,y) =$ ~~max~~ maximale verwachte netto rente opbrengst in de perioden $n, n+1, \dots, 6$, gegeven de toestand (x,y) aan begin van maand n.

(g) $f_n(0,y) = R(0,y,0,i_n,u_n) + f_{n+1}(y,0)$

$f_n(1,y) = R(0,y,0,i_n,y_n) + \cancel{f_{n+1}}$

$+ 0.9\, f_{n+1}(y + \max(0, 1-i_n-u_n), 0)$

$+ 0.1\, f_{n+1}(y + \max(0, 1-u_n), 0)$

$$f_n(x,y) = \max_{d\in\{0,1,\dots,x-1\}} \Big[R(x,y,d,i_n,u_n) + 0.9\, f_{n+1}(y_n + \max(0, x_n-i_n-d-u_n), d) + 0.1\, f_{n+1}(y_n + \max(0, x_n-d-u_n), d) \Big]$$

$x = 2, 3, \dots$

$n = 1, 2, \dots, 6$

$f_7(x,y) = 0 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$

(h) Omdat $i_6 = 0$ en $u_6 = 2$ geldt

$$R(x,y,d,0,2) = 0.03d - 0.12 \max\{0, 2+d-x\}$$

dus

$$f_6(0,y) = -0.24 \qquad d=0$$
$$f_6(1,y) = -0.12 \qquad d=0$$
$$f_6(x,y) = \max_{d\in\{0,1,\ldots,x-1\}} \{0.03d - 0.12 \max[0, 2+d-x]\}, \quad x \geq$$

De te maximaliseren functie van d in het rechter
stijgt tot $d = x-2$ en daalt daarna omdat $0.12 >$
De structuur van de optimale beslissingen $d_6(x,y)$ lui
dus

$$d^*(x,y) = 0 \qquad x=0,1 \text{ en } y=0,1,\ldots$$
$$d^*(x,y) = x-2 \qquad x=2,3,\ldots \text{ en } y=0,1,\ldots$$

zodat $\quad d_6(3,2) = 1$ en $d_6(2,3) = 0$

<u>Opm</u>: Uit bovenstaande uitwerking blijkt dat bij de modell
bepaalde keuzes zijn gemaakt. Andere keuzes zijn
mogelijk, leidend tot andere modelleringen.

OR 2 (d.d. 3-12-'99) (16) I

Opg. 2.

a) Het ~~systeem wordt~~ wekelijks beschouwd, overeenkomstig de veronderstellingen voor een Markov Beslissingsmodel.
Als de consultant bezet is, dient aangegeven te worden welk type hij onderhanden heeft. De andere ~~toestanden~~ zijn dus (y) met $y = 2$ of 3.

b) $D(0,0,0) = \{\text{niets accepteren}\} = \{d=0\}$

$D(1,0,0) = \{d=0, d=1\}$

$D(0,1,0) = \{d=0, d=2\}$

$D(0,0,1) = \{d=0, d=3\}$

$D(1,1,0) = \{d=0, d=1, d=2\}$

$D(1,0,1) = \{d=0, d=1, d=3\}$

$D(0,1,1) = \{d=0, d=2, d=3\}$

$D(1,1,1) = \{d=0, d=1, d=2, d=3\}$

waarbij $d=0$ (= niets acc), $d=i$ = (acc. type i), $i=1,2,3$.

[Opm: $D(2) = \{0\}$ en $D(3) = 0$; niet gevraagd]

Is de consultant vrij [aan het begin van een week] en neemt hij beslissing $d \in \{0,1,2,3\}$ dan is hij weer vrij na een tijdsduur $t(d)$ en de toestand is dan van de vorm (z_1, z_2, z_3), $z_i \in \{0$
Hierbij geldt

$$t(0) = t(1) = 1 \quad \text{en} \quad t(2) = t(3) = 2.$$

Is de consultant bezet, zodat $d=0$, dan is de toestand na $t(0) = 1$ ook van de vorm (z_1, z_2, z_3), de lopende job is immers gereed gekomen.

Op grond van de onafhankelijkheid van de drie aankom
en de onafhankelijkheid van de aankomsten per type (
een Markov-beslissingsmodel) geldt dat de toestand $(z_1$
onafhankelijk is van (x_1, x_2, x_3) of (y). Er geldt:

$$p(0,0,0) = \frac{8\times 7\times 6}{1000} = \frac{336}{1000}$$
$$p(1,0,0) = \frac{2\times 7\times 6}{1000} = \frac{84}{1000}$$
$$p(0,1,0) = \frac{8\times 3\times 6}{1000} = \frac{144}{1000}$$
$$p(0,0,1) = \frac{8\times 7\times 4}{1000} = \frac{224}{1000}$$
$$p(1,1,0) = \frac{2\times 3\times 6}{1000} = \frac{36}{1000}$$
$$p(1,0,1) = \frac{2\times 7\times 4}{1000} = \frac{56}{1000}$$
$$p(0,1,1) = \frac{8\times 3\times 4}{1000} = \frac{96}{1000}$$
$$p(1,1,1) = \frac{2\times 3\times 4}{1000} = \frac{24}{1000}$$
$$\overline{\quad 1 \quad} \; +$$

c) Stel dat men als beslismomenten alleen kijkt naar we
het begin waarvan de consultant vrij is. De toestand is
steeds van de vorm (x_1, x_2, x_3).
Laat dus (x_1, x_2, x_3) de begintoestand zijn op het ee
beslismoment. Neemt de consultant beslissing d, da
dit na $t(d)$ ~~een~~ weken een opbrengst $C(d)$. De co
waarde van deze opbrengst op het eerste beslismome
dus $C(d).\rho^{t(d)}$, waarbij

$C(d)$ = opbrengst job type d, $d=1,2,3)$ en

$C(d) = 0$, als $d=0$.

De minimaal verwachte verdisconteerde opbrengst over de oneindi
dus de optimale waardefunctie, is $V(x_1, x_2, x_3)$, gezeke
het eerste beslismoment.

1^e - iteratiestap $(\rho = 0.95)$, $\bar{V}_0 = 400$

$$V_1(0,0,0) = 0.95 \times 400 = 380$$

$$V_1(1,0,0) = \max_{d\in\{0,1\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+400\}$$

$$= \max\{400 \times 0.95,\ 0.95(400+5)\} = 384{,}75$$

$$V_1(0,1,0) = \max_{d\in\{0,2\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+400\}$$

$$= \max\{0.95\times 400,\ 0.95^2 \times (400+8)\} = 368{,}22$$

$$V_1(0,0,1) = \max_{d\in\{0,3\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+400\}$$

$$= \max\{0.95\times 400,\ 0.95^2 \times (20+400)\} = 379.05$$

$$V_1(1,1,0) = \max_{d\in\{0,1,2\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+\bar{V}\}$$

$$= \max\{0.95\times 400,\ 0.95\times 405,\ 0.95^2\times 408\} = 384{,}75$$

$$V_1(1,0,1) = \max_{d\in\{0,1,3\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+400\}$$

$$= \max\{0.95\times 400,\ 0.95\times(5+400),\ 0.95^2\times(20+400)\} = 384.$$

$$V_1(0,1,1) = \max_{d\in\{0,2,3\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+400\}$$

$$= \max\{0.95\times 400,\ 0.95^2\times 408,\ 0.95^2\times 420\} = 379.05$$

$$V_1(1,1,1) = \max_{d\in\{0,1,2,3\}} \rho^{t(d)}\{C(d)+400\}$$

$$= \max\{0.95\times 400,\ 0.95\times 405,\ 0.95^2\times 408,\ 0.95^2\times 420\} = 384.$$

In de 2^e stap berekent men eerst $\bar{V}_1 = \sum_{(z_1,z_2,z_3)} p(z_1,z_2,z_3)\, V_1(z_1,z_2,z_3)$

waarna bovenstaande berekening wordt uitgevoerd met $\bar{V}_1$.

Is de toestand (z_1, z_2, z_3) in het tweede beslismoment, da
is de ~~minimale~~ verwachte verdisconteerde opbrengst vanaf dit mome
tot in het oneindige, uiteraard gelijk aan $V(z_1, z_2, z_3)$.
Daar de toestand (z_1, z_2, z_3) optreedt met kans $p(z_1, z_$
is de gemiddelde minimale verwachte verdisconteerde op
vanaf het tweede beslismoment gelijk aan

$$\bar{V} = \sum_{(z_1,z_2,z_3)} p(z_1,z_2,z_3)\, V(z_1,z_2,z_3).$$

De contante waarde hiervan op het eerste beslismome
bedraagt bij beslissing d, dus $\rho^{t(d)}\bar{V}$.
Volgens het optimaliteitsprincipe van Bellman, dient d
te gelden dat de beslissing d zodanig gekozen moet
worden dat $\rho^{t(d)} C(d) + \rho^{t(d)} \bar{V}$ maximaal is, en dit
maximum is gelijk aan $V(x_1, x_2, x_3)$, m.a.w.

$$V(x_1,x_2,x_3) = \max_{d \in D(x_1,x_2,x_3)} \rho^{t(d)} \left(C(d) + \bar{V} \right) \qquad (*$$

Daar in de toestanden $\{(y), y = 2,3\}$ $d = 0$ en $t(d)$
geldt

$$V(2) = \rho\,(8 + \bar{V})$$
en
$$V(3) = \rho\,(20\,\xi + \bar{V})$$

d) De algemene recursie voor de value-iteratie methode voor h
oplossen van de optimaliteitsvergelijking $(*)$ luidt

$$V_n(x_1,x_2,x_3) = \max_{d \in D(x_1,x_2,x_3)} \rho^{t(d)} \left[C(d) + \bar{V}_{n-1} \right], \quad n =$$

waarin

$$\bar{V}_{n-1} = \sum_{(z_1,z_2,z_3)} p(z_1,z_2,z_3)\, V_{n-1}(z_1,z_2,z_3)$$

(e.) $\min \bar{V}$ $(\rho = 0.95)$

$V(0,0,0) = \rho \bar{V}$

$\begin{cases} V(1,0,0) \geq \rho \bar{V} \\ V(1,0,0) \geq \rho(5+\bar{V}) \end{cases}$ (overbooking want $\bar{V} \geq 0$)

$\begin{cases} V(0,1,0) \geq \rho \bar{V} \\ V(0,1,0) \geq \rho^2(8+\bar{V}) \end{cases}$

$\begin{cases} V(0,0,1) \geq \rho \bar{V} \\ V(0,0,1) \geq \rho^2(20+\bar{V}) \end{cases}$

$\begin{cases} V(1,1,0) \geq \rho \bar{V} \\ \cancel{V(1,1,0) \geq \rho(5+\bar{V})} \\ V(1,1,0) \geq \rho^2(8+\bar{V}) \end{cases}$ (overbooking)

$\begin{cases} V(1,0,1) \geq \rho \bar{V} \\ V(1,0,1) \geq \rho(5+\bar{V}) \\ V(1,0,1) \geq \rho^2(20+\bar{V}) \end{cases}$ (overbooking)

$\begin{cases} V(0,1,1) \geq \rho \bar{V} \\ V(0,1,1) \geq \rho^2(8+\bar{V}) \\ V(0,1,1) \geq \rho^2(20+\bar{V}) \end{cases}$ (overbooking)

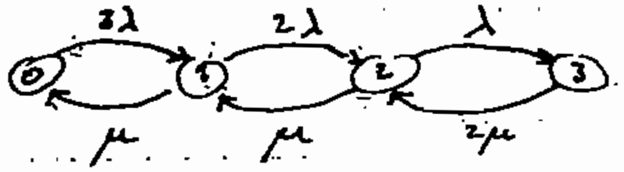
$\begin{cases} V(1,1,1) \geq \rho \bar{V} \\ V(1,1,1) \geq \rho(5+\bar{V}) \\ V(1,1,1) \geq \rho^2(8+\bar{V}) \\ V(1,1,1) \geq \rho^2(20+\bar{V}) \end{cases}$ (overbooking) (overbooking)

OR2 (dd 3-12-99)

Opg. 3.

(a) Het betreft hier een 'machine interference model'.
De toestanden is het aantal defecte machines $S = \{0,1,$
[of het aantal werkende machines].

(b) Uitgaande van het proces dat het aantal defecte ma
beschrijft, wordt het transitiediagram gegeven door



$\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = 1$

c) Deze globale balans-(evenwichts-)vergelijkingen luiden

$$3\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(2\lambda+\mu) P_1 = 3\lambda P_0 + \mu P_2$$
$$(\lambda+\mu) P_2 = 2\lambda P_1 + 2\mu P_3$$
$$2\mu P_3 = \lambda P_2$$

$\boxed{\text{Waarbij } P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1}$

De oplossing luidt:

$$P_1 = \frac{3\lambda}{\mu} P_0 = \frac{3}{4} P_0$$
$$P_2 = \left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{3\lambda}{\mu}\right) P_0 = \frac{3}{8} P_0$$
$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{3\lambda}{\mu}\right) = \frac{3}{64} P_0$$

met

$$P_0 = \left\{1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{64}\right\}^{-1}$$

De kansen P_i geven tevens de gevraagde fracties

d) Definieert men de bezettingsgraad als de verhoudi
tussen het gemiddeld aantal werkende monteurs
het totale aantal monteurs, dan wordt de

bezettingsgraad gegeven door:

$$\frac{1}{2}\left(1 \cdot P_1 + 2P_2 + 2P_3\right)$$

e) Het verwachte aantal gestoorde machines $= \boxed{1 \cdot P_1 + 2P_2 + 3P_3}$

De gemiddelde dagproductie bedraagt:

$$3000\, P_0 + 2000\, P_1 + 1000\, P_2$$

f) De storingsfrequentie $= \boxed{3\lambda P_0 + 2\lambda P_1 + \lambda P_2}$

g) Definieer : $\bar{N}$ = gem. aantal gestoorde machines (= antw. (e))

$\bar{F}$ = " doorlooptijd in de onderhoudsafdeling

$\bar{\lambda}$ = gem aantal storingen per dag (= antw. (f))

Volgens de relatie van Little geldt: $\bar{N} = \bar{\lambda}\bar{F}$, dus de verwachte doorlooptijd in de onderhoudsafdeling bedraagt

$$\boxed{\bar{F} = \frac{1}{\bar{\lambda}}\bar{N} = \frac{P_1 + 2P_2 + 3P_3}{3\lambda P_0 + 2\lambda P_1 + \lambda P_2}}$$

h) Is $\bar{W}$ de verwachte wachttijd dan geldt : $\bar{W} = \bar{F} - \frac{1}{\mu}$, dus is het gevraagde percentage

$$\frac{\bar{F} - \frac{1}{\mu}}{\bar{F}} * 100\,\%$$

(17)

Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Kenmerk: TW99/T-OR/21/dh
Datum: 4 augustus 1999

Universiteit Twente

Tentamen Operations Research II (158006)

~~Woensdag~~ 18 augustus 1999, 9.00 – 12.00 uur

Dynamisch programmeren

uitwerking STAAT achterin NOV '96

1. Je doet mee aan een spelletje op televisie, en belandt in de finale met een bedrag van 3750 gulden. In deze finale kun je d.m.v. een gokspelletje je bedrag nog enigszins ophogen. Dit spelletje bestaat uit maximaal drie beurten. Bij iedere beurt mag je besluiten te stoppen, om daarmee het bedrag in kas te incasseren. Zoniet, dan moet je met een speciale dobbelsteen gooien om te bepalen met hoeveel je bedrag zal worden opgehoogd. Je loopt daarbij echter het risico op BLUT te belanden, waardoor je al je geld kwijtraakt (maar nog wel mag doorspelen). Je vraagt je af wat te doen teneinde je verwachte eindbedrag te maximaliseren. De dobbelsteen ziet er (schematisch) als volgt uit:

uitkomst	fl. 250,–	fl. 500,–	fl. 1000,–	BLUT
kans	0.4	0.3	0.2	0.1

Je kunt dit probleem oplossen m.b.v. een stochastisch DP-formulering. Definieer hiertoe $f_n(x)$ als je maximale verwachte eindbedrag indien je x gulden in kas hebt na de n^e beurt.

1 a. Benoem de fasen, toestanden en beslissingen in bovenstaande formulering. Geef bovendien de toestandsruimte in elke fase.

1 b. Beargumenteer dat $f_3(x) = x$ voor alle x.

2 c. Laat nu zien dat $f_2(x) = x$ voor $x \geq 4500$ en $f_2(x) = 0.9 \cdot x + 450$ voor $x \leq 4500$.

2 d. Geef de recurrente betrekkingen voor $f_0(x)$ en $f_1(x)$.

4 e. Bepaal m.b.v. achterwaartse recursie je optimale strategie, en geef deze in woorden weer. Hoeveel bedraagt je verwachte eindbedrag?

2. Bij de produktie van vliegtuigen worden onderdelen gebakken in een speciaal daarvoor bestemde bakoven. De produktie in deze bakovens vindt plaats door middel van zogeheten produktie-runs, welke een volle dag duren. Vindt op een dag een produktie plaats dan worden alle aanwezige onderdelen, met een maximum van drie, in de oven gebakken om vervolgens te worden getransporteerd naar een volgende afdeling. Liggen aan het begin van een dag drie of meer onderdelen te wachten dan wordt altijd een produktie-run gestart. Liggen er één of twee onderdelen te wachten dan heeft men de keuze om die dag al of niet te produceren.
Het aankomstproces van onderdelen is stochastisch: iedere dag komt één onderdeel aan, met kans $p = \frac{2}{3}$, of geen onderdeel met kans $\frac{1}{3}$. Een onderdeel arriveert steeds voor de start van een produktie-run. Aan het begin van dag 1, na een eventuele aankomst van een onderdeel, zijn niet meer dan 3 onderdelen aanwezig. De kosten van een produktie-run bedragen 1000 gulden. De kosten van onderhanden werk wordt geschat op 100 gulden per dag per onderdeel aanwezig aan het begin van de dag, inclusief een eventueel gearriveerd onderdeel.

Gezocht wordt een optimale produktiepolitiek, welke de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. De disconteringsfactor bedraagt $\frac{3}{4}$ per dag.

Z.O.Z.

(17)

1 a. Verklaar waarom aan het begin van de dag nooit meer dan drie onderdelen voor de oven liggen te wachten.

2 b. Bepaal de toestanden, de beslissingen in deze toestanden, de directe kosten als functie van toestand en gekozen beslissing, en de overgangskansen behorend bij dit Markov-beslissingsprobleem.

1 c. Formuleer de optimaliteitsvergelijking voor dit probleem in algemene zin, dus alleen symbolisch.

4 d. Onderzoek m.b.v. strategie-iteratie ("policy-iteration") of de politiek welke pas een produktierun start als er drie onderdelen liggen te wachten optimaal is.

2 e. Formuleer een L.P.-probleem waarmee de optimale stationaire politiek bepaald kan worden.

---

wachttijd

3. Beschouw een eindig wachtsysteem met drie wachtplaatsen en één loket. Klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met gemiddelde μ^{-1}. Indien het systeem vol is op moment dat iemand arriveert gaat deze weg en komt nooit meer terug. Zolang een klant wacht geeft deze in ieder tijdsinterval $(t, t+h)$, h klein, een geboorte met infinitesimale kans νh. Nieuw geboren klanten genereren op dezelfde wijze geboorten. Is de wachtruimte vol dan zijn geen geboorten meer mogelijk.

A. Laat $\{X_t, t > 0\}$ het totaal aantal klanten zijn op tijdstip t en P_j $(j = 0,1,2,3,4)$ de stationaire kans op j klanten in het syteem.

1 a) Geef het transitiediagram van het proces X_t en de evenwichtsvergelijkingen.

1 b) Bepaal de stationaire verdeling $\{P_j,\ 0 \le j \le 4\}$.

B. De antwoorden op de volgende vragen mogen gegeven worden in termen van λ, μ, ν en P_j's.

1 c) Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal wachtenden en het gemiddeld aantal in het systeem.

1 d) Hoeveel arriverende klanten gaan per tijdseenheid het systeem binnen?

1 e) Hoeveel klanten worden per tijdseenheid geboren?

1 f) Hoeveel klanten worden per tijdseenheid bediend?

1 g) Hoe groot is de bezettingsgraad van het loket? Welk deel hiervan is afkomstig van klanten die binnen het systeem zijn geboren?

1 h) Welke relatie bestaat er tussen de antwoorden van d), e) en f)? Verklaar uw antwoord.

1 i) Bepaal de gemiddelde wachttijd van een willekeurige klant in het systeem.

(+1) Normering: Alle opgaven even zwaar.

Opg 1 : zie nov. 1996

Opg 2:

(a) Omdat er aan het begin van de eerste dag niet meer dan 3 eenheden aanwezig zijn, er per dag maximaal 1 eenheid arriveert en bij de aanwezigheid van 3 eenheden deze alle drie 'verdwijnen', kunnen er nooit meer dan 3 aanwezig zijn.

(b) toestanden : $S = \{0, 1, 2, 3\}$, hoeveelheid aan begin van de dag na eventuele aankomst van een eenheid

fase : dagnummers

beslissingen : $A = \{$ Produceren , Niet Produceren $\} = \{P, NP\}$

directe kosten $\{c(i,a)\}$

$a \backslash i$	0	1	2	3
P	$\times$	1100	1200	1300
NP	0	100	200	$\times$

overgangskansen $P_{ij}(a)$ of $P(j \mid i, a)$

$(i,a) \backslash j$	0	1	2	3
(0, NP)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
(1, P)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
(1, NP)		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
(2, P)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
(2, NP)			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
(3, P)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		

(c)

$$V(0) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}V(0) + \frac{2}{3}V(1)\right)$$

$$V(1) = \min \begin{cases} 1100 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}V(0) + \frac{2}{3}V(1)\right\} \\ 100 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}V(1) + \frac{2}{3}V(2)\right\} \end{cases}$$

$$V(2) = \min \begin{cases} 200 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}V(2) + \frac{2}{3}V(3)\right\} \\ 1200 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}V(0) + \frac{2}{3}V(1)\right\} \end{cases} ;$$

$$V(3) = 1300 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}V(0) + \frac{2}{3}V(1)\right\}$$

(d) Allereerst de <u>waardebepaling</u> behorende bij de startp[olitiek]
$\pi = (\delta, \delta, \dots)$ met $\delta(0) = NP$, $\delta(1) = NP$, $\delta(2) = NP$, $\delta(3) = P$.
De bijbehorende waardefunctie $V_\pi(i)$, $i = 0,1,2,3$ voldoe[t aan]
de vergelijkingen

$$V_\pi(0) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}V(0) + \frac{2}{3}V(1)\right)$$
$$V_\pi(1) = 100 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}V_\pi(1) + \frac{2}{3}V_\pi(2)\right)$$
$$V_\pi(2) = 200 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}V_\pi(2) + \frac{2}{3}V_\pi(3)\right)$$
$$V_\pi(3) = 1300 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}V_\pi(0) + \frac{2}{3}V_\pi(1)\right)$$

De oplossing is

$V_\pi(0) \approx 842$, $V_\pi(1) \approx 1263$, $V_\pi(2) \approx 1695$, $V_\pi(3) \simeq 2142$

Vervolgens de verbeterings- of teststap:

toestand 1 : $T(1) = \min \begin{cases} 1100 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3} * 842 + \frac{2}{3} * 1263\right\} \\ 100 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3} * 1263 + \frac{2}{3} * \cancel{2142}\ 1695\right\} \end{cases}$

$$= \min \begin{cases} 1942 & [P] \\ 1263 & [NP] \end{cases}$$

De beslissing wordt dus niet gewijzigd.

Toestand 2 : $T(2) = \min \begin{cases} 1200 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3} * 842 + \frac{2}{3} * 1263\right\} \\ 200 + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3} * 1695 + \frac{2}{3} * 2142\right\} \end{cases}$

$$= \min \begin{cases} 2042 & [P] \\ 1695 & [NP] \end{cases}$$

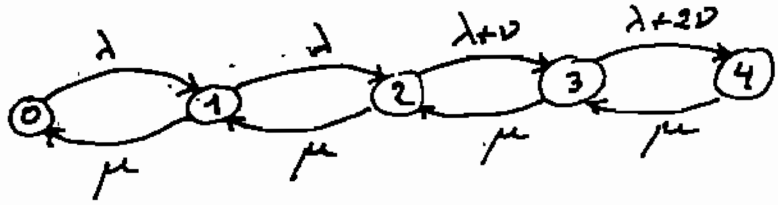
Ook in toestand 2 blijft de beslissing ongewijzigd, dus is de politiek $\check{\pi}$ optimaal.

(e) max $x_0 + x_1 + x_2 + x_3$

$$x_0 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x_0 + \frac{2}{3}x_1\right)$$
$$x_1 \leq 1100 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x_0 + \frac{2}{3}x_1\right)$$
$$x_1 \leq 100 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)$$
$$x_2 \leq 1200 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x_0 + \frac{2}{3}x_1\right)$$
$$x_2 \leq 200 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)$$
$$x_3 = 1300 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x_0 + \frac{2}{3}x_1\right)$$

3

(a)



Evenwichtsvergelijkingen

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda+\mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$$
$$(\lambda+\nu+\mu) P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3$$
$$(\lambda+2\nu+\mu) P_3 = (\lambda+\nu) P_2 + \mu P_4$$
$$\mu P_4 = (\lambda+2\nu) P_3$$

(b) Uit (a) volgt

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$\lambda P_1 = \mu P_2$$
$$(\lambda+\nu) P_2 = \mu P_3$$
$$(\lambda+2\nu) P_3 = \mu P_4$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$
$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$
$$P_3 = \frac{(\lambda+\nu)}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$
$$P_4 = \frac{(\lambda+\nu)}{\mu}\frac{(\lambda+2\nu)}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

Omdat $P_0 + P_1 + \cdots + P_4 = 1$
volgt voor $P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left\{1 + \frac{(\lambda+\nu)}{\mu} + \frac{(\lambda+\nu)(\lambda+2\nu)}{\mu^2}\right\}\right]^{-1}$

(c) $E(\#\text{ in systeem}) = \sum_{i=1}^{4} i P_i$

$E(\#\text{ wachtenden}) = \sum_{i=2}^{4} (i-1) P_i$

(d) $\lambda(1 - P_4)$

(e) $\nu P_2 + 2\nu P_3$

(f) $\mu(1 - P_0)$

(g) Bezettingsgraad = $1 - P_0$

fractie afkomstig van geboorten =

= fractie klanten die in systeem zijn geboren = $\dfrac{\nu P_2 + 2\nu P_3}{\mu(1-P_0)} = \dfrac{(e)}{(f)}$

(h) De stroom vertrekkende klanten bestaat uit de som van in het systeem geboren klanten (e) en de stroom die het systeem binnen gaat (d), dus $(f) = (e) + (d)$.

(i) Volgens Little : $\tilde{\lambda} E(W) = E(N_W)$,

waarin $\tilde{\lambda} = \mu(1-P_0)$ en $E(N_W) = P_2 + 2P_3 + 3P_4$

dus $E(W) = \dfrac{P_2 + 2P_3 + 3P_4}{\mu(1-P_0)}$

Faculteit der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk: TW98/T-A&DW/10/dh

Datum: 15 maart 1999

VII

Universiteit Twente

Tentamen Operations Research II (158006)

~~Vrijdag 19 maart 1999, 9.00 – 12.00 uur~~

1. Iemand bezit aandelen van een beursgenoteerd bedrijf. De huidige prijs van het aandeel bedraagt EU 100,–. Gemakshalve gaan we er vanuit dat bij iedere dag één prijs hoort. De aandelen moeten uiterlijk binnen 4 dagen worden verkocht. Er moet dus beslist worden of de aandelen nu worden verkocht of dat er 1,2 of 3 dagen moet worden gewacht met verkopen. De effectenmarkt fluctueert sterk: van dag op dag kan de prijs EU 20 stijgen of EU 20 dalen. De kansen op deze veranderingen worden als volgt ingeschat (de huidige dag is dag 1)

dag	stijging	daling
2	p	$1-p$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Op dag 2 is de prijs dus EU 120 met kans p, enz. Gezocht wordt de optimale beslissing op de eerste dag als functie van p $(0 < p < 1)$, welke de verwachte verkoopprijs maximaliseert.

a. Formuleer het probleem als een D.P.-probleem. Definieer hierbij:

1. de fasen n
2. de toestanden S
3. de beslissingen D
4. de optimale waardefunctie. f_N

b. Geef de D.P. recursie voor de optimale waardefunctie.

c. Bepaal de optimale beslissing op dag 1 als functie van p. Hoe groot is de maximale verwachte verkoopprijs voor $p = \frac{1}{2}$.

2. Bij produktie van vliegtuigen worden onderdelen gebakken in een speciaal daarvoor bestemde bakoven. De produktie in deze bakovens vindt plaats door middel van zogeheten produktie-runs, welke een volle dag duren. Vindt op een dag een produktie-run plaats dan worden alle aanwezige onderdelen, met een maximum van drie, in de oven gebakken om vervolgens te worden getransporteerd naar een volgende afdeling. Liggen aan het begin van een dag drie of meer onderdelen te wachten dan wordt altijd een produktie-run gestart. Liggen er één of twee onderdelen te wachten dan heeft men de keuze om die dag al of niet te produceren.
Het aankomstproces van onderdelen is stochastisch: iedere dag komt één onderdeel aan, met kans $p = \frac{2}{3}$, of geen onderdeel met kans $\frac{1}{3}$.
Een onderdeel arriveert steeds voor de start van een produktie-run.
Aan het begin van dag 1, na een eventuele aankomst van een onderdeel, zijn niet meer dan 3 onderdelen aanwezig. De kosten van een produktie-run bedragen 1000 gulden. De kosten van onderhanden werk worden geschat op 100 gulden per dag per onderdeel aanwezig aan het begin van de dag, inclusief een eventueel gearriveerd onderdeel.

Gezocht wordt een optimale produktie politiek, welke de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. De disconteringsfactor bedraagt $\frac{3}{4}$ per dag.

Z.O.Z.

a. Verklaar waarom aan het begin van een dag nooit meer dan drie onderdelen voor de oven liggen te wachten.

b. Bepaal de toestanden, de beslissingen in deze toestanden, de directe kosten als functie van toestand en gekozen beslissing, en de overgangskansen behorend bij dit Markov-beslissingsprobleem.

c. Formuleer de optimaliteitsvergelijking in algemene zin, dus alleen symbolisch.

d. Onderzoek m.b.v. strategie-iteratie ("policy-iteration") of de politiek welke pas een produktie-run start als er drie onderdelen liggen te wachten optimaal is.

e. Formuleer een L.P.-probleem waarmee de optimale stationaire politiek bepaald kan worden.

3. Beschouw het volgende 1-loketten wachtsysteem met eindige wachtruimte. Er komen 2 soorten klanten aan volgens twee onafhankelijke Poissonprocessen met intensiteiten λ_1 en λ_2. De bedieningsduur van type i klanten is exponentieel verdeeld met gemiddelde μ_i^{-1}. (Alle bedieningsduren zijn onderling onafhankelijk en onafhankelijk van de aankomstprocessen.) De wachtruimte kan slechts 2 klanten bevatten. Als het systeem vol is op moment van aankomst van een klant gaat deze klant verloren (= komt niet meer terug).
Klanten van type 1 hebben een "break-in" prioriteit op type 2. Dit wil zeggen dat indien op moment dat een type 1 klant het systeem binnen komt en er een type 2 klant in bediening is, de lopende bediening wordt onderbroken en de type 1 klant in bediening wordt genomen. De bediening van de type 2 klant wordt, op moment dat er geen type 1 klanten meer zijn, in zijn geheel op nieuw gestart; de nieuwe bedieningsduur is onafhankelijk van het verleden. Per type is de bedieningsvolgorde: "first come – first served".

De toestand op tijdstip t wordt beschreven door het proces $\{(X_t, Y_t), t > 0\}$, waarin X_t en Y_t, respectievelijk, de aantallen klanten zijn van type 1 en type 2.

a. Geef het transitiediagram van genoemd proces.

b. Geef de (globale) evenwichtsvergelijkingen voor de kansen $P_{ij} = \lim_{t\to\infty} P(X_t = i, Y_t = j)$, $0 \le i + j \le 3$.

c. Beredeneer waarom het proces $\{X_t, t > 0\}$ de aantallen klanten in een $M|M|1|3$ systeem beschrijft (3 = maximum aantal klanten in het systeem).

De volgende vragen (m.b.t. de stationaire toestand) mogen worden beantwoord in termen van λ_i, μ_i $(i = 1, 2)$ en de P_{ij}'s.

d. Geef uitdrukkingen voor de gemiddelde aantallen klanten van type 1 en type 2.

e. Hoeveel klanten van type 1 en 2 worden per tijdseenheid bediend?

f. Bereken de gemiddelde doorlooptijd per type klant.

g. Wat is de gemiddelde doorlooptijd van een willekeurige klant.

h. Hoe groot is de bezettingsgraad van het loket. Welk deel van de bezettingsgraad is van type 1?

Normering: Alle opgaven even zwaar.

Totaal: $27 + 3 = 30$ punten.

Uitwerking Test OR II 19-3-99 (18)

Opg 1.

(a) 1. fase = dagnummer

2. toestand = geldende prijs

3. beslissingen = {verkopen, niet verkopen}

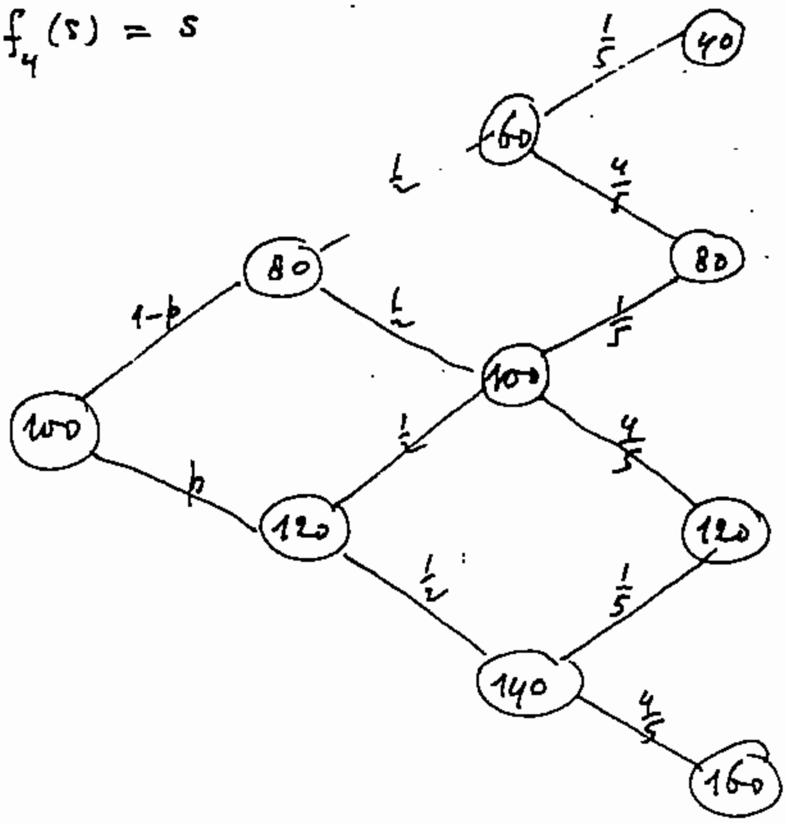
4. $f_j(s)$ = max. verwachte prijs als op dag j de prij[s van het]

(nog niet verkochte) aandeel $s is.

(b)

$$\begin{cases} f_j(s) = \max \begin{cases} s & [\text{verkopen}] \\ p_{j+1} f_{j+1}(s+20) + (1-p_{j+1}) f_{j+1}(s-20) & [\text{nie[t verkopen]}] \end{cases} \\ j = 1,2,3 \\ f_4(s) = s \end{cases}$$

(c)



beslisboom

$f_4(s) = s \qquad s = 40, 80, 120, 160$

$f_3(60) = \max\{60, \frac{1}{5}\times 40 + \frac{4}{5}\times 80\} = 72$ [niet verk]

$f_3(100) = \max\{100, \frac{1}{5}\times 80 + \frac{4}{5}\times 120\} = 112$ [niet verk]

$f_3(140) = \max\{140, \frac{1}{5}\times 120 + \frac{4}{5}\times 160\} = 152$ [niet verk]

$f_2(80) = \max\{80, \frac{1}{2} f_3(100) + \frac{1}{2} f_3(60)\} = 92$ [niet verk]

$f_2(120) = \max\{120, \frac{1}{2} f_3(140) + \frac{1}{2} f_3(100)\} = 132$ [niet verk]

$$f_1(100) = \max \begin{cases} 100 & \text{[verk]} \\ p f_2(120) + (1-p) f_2(80) = 132p + (1-p)92 = 92 + 40p & \text{[niet v} \end{cases}$$

De optimale beslissing is:

als $100 > 92 + 40p \iff p < \frac{1}{5} \to$ verkopen

" $100 < 92 + 40p \iff p > \frac{1}{5} \to$ niet verkopen

" $p = \frac{1}{5}$ beide beslissingen optimaal.

Als $p = \frac{1}{2}$ is max. verwachte verkoopprijs: **112**.

Opg 2. zie 16-6-95

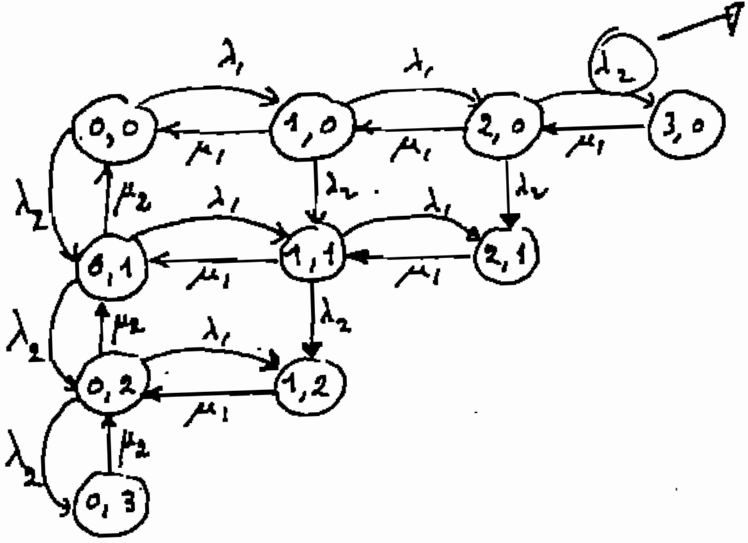
19-3-'99

(18)

Opg 3.

(a)

fout. λ_1



(b)

$$(\lambda_1+\lambda_2)\, P_{00} = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{01}$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\, P_{10} = \lambda_1 P_{00} + \mu_1 P_{20}$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\, P_{01} = \lambda_2 P_{00} + \mu_1 P_{11} + \mu_2 P_{02}$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\, P_{11} = \lambda_1 P_{01} + \lambda_2 P_{10} + \mu_1 P_{21}$$
$$\mu_1 P_{21} = \lambda_1 P_{11} + \lambda_2 P_{20}$$
$$\mu_1 P_{12} = \lambda_1 P_{02} + \lambda_2 P_{11}$$
(½) $$\mu_1 P_{30} = \lambda_1 P_{20}$$
$$\mu_2 P_{03} = \lambda_2 P_{02}$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\, P_{20} = \lambda_1 P_{10} + \mu_1 P_{30}$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\, P_{02} = \lambda_2 P_{01} + \mu_1 P_{12} + \mu_2 P_{03}$$

(c) Wegens de prioriteitsregel hebben type 1 klanten nooit last van de aanwezigheid van type 2 klanten, zodat zij alleen hoeven te wachten op type 1 klanten. Dit leidt tot een M|M|1 systeem indien de wachtruimte onbeperkt is. De bewering is echter onjuist omdat de aanwezigheid van type 2 klanten kan verhinderen dat een type 1 klant binnen kan komen, indien 't systeem vol is!

V/I = Vol.

(18)

(d) $\bar{L}_1 = 1\cdot(P_{10}+P_{11}+P_{12}) + 2\,(P_{20}+P_{21}) + 3\,P_{30}$

$\bar{L}_2 = 1\cdot(P_{01}+P_{11}+P_{21}) + 2\,(P_{02}+P_{12}) + 3\,P_{03}$

(e) Vertrekintensiteit type 1 $= \lambda_1 (1-P_{21}-P_{12}-P_{30}-P_{03}) =$

$= \mu_1 (\underline{P_{01}}+P_{11}+P_{21}+P_{12}+P_{20}+P_{30}) =$

fout P_{10}.

Vertrekintensiteit type 2 $= \lambda_2 (1-P_{21}-P_{12}-P_{30}-P_{03}) = \tilde{\lambda}$

$= \mu_2 (P_{01}+P_{02}+P_{03})$

(f) $\bar{F}_1 = \bar{L}_1 / \tilde{\lambda}_1$ (Little!)

$\bar{F}_2 = \bar{L}_2 / \tilde{\lambda}_2$

(g) $\bar{F} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,\bar{F}_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,\bar{F}_2$

(h) bezettingsgraad loket $= 1 - P_{00}$

bijdrage type 1 $= P_{10}+P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{20}+P_{30}$

Gevraagde fractie $= \dfrac{P_{10}+P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{20}+P_{30}}{1-P_{00}}$

(18)

OR 2 19 maart 1999

1 a fasen $n = 1, 2, 3, 4$ (4 dagen)
~~t~~ i = huidige waarde
d = w, n verlopen
$f_n(i)$ = max verwachte opbrengst als je je in fase n bevindt en de waarde i bedraagt

b. $f_{5}(i) = i$
$f_n(i) = \max \begin{cases} i \\ p\, f_{n+1}(i+20) + (1-p) f_{n+1} \end{cases}$

c dag	mogelijke waarde
1	100
2	80, ~~100~~ 120
3	60, 100, 140
4	40, 80, 120, 160

$f_4(40) = 40$
$f_4(80) = 80$
$f_4(120) = 120$
$f_4(160) = 160$

$f_3(60) = \max \begin{cases} 60 & = 60 \\ \frac{4}{5} \cdot 80 + \frac{1}{5} \cdot 40 & = 7 \end{cases}$

$f_3(100) = \max \begin{cases} 100 & = \\ \frac{4}{5} \cdot 120 + \frac{1}{5} \cdot 80 & = \end{cases}$

$f_3(140) = \max \begin{cases} 140 & = \\ \frac{4}{5} \cdot 100 + \frac{1}{5} \cdot 20 & = \end{cases}$

(18)

$f_2(80) = \max \begin{cases} 80 & = 80 \quad a \\ \frac{1}{2} f_3(100) + \frac{1}{2} f_3(80) & = 92^* \quad h \end{cases}$

$f_2(120) = \max \begin{cases} 120 & = 120 \quad w \\ \frac{1}{2} f_3(140) + \frac{1}{2} f_3(100) & = 132^* \quad h \end{cases}$

$f_1(100) = \max \begin{cases} 100 & w \\ p \cdot f_2(120) + (1-p) f_2(80) & h \end{cases}$

$\cancel{132p}\ 132p + (1-p)92$

$= 40p + 92$

verkopen als $100 \geq 40p + 92$

dus als $p \leq 0{,}2$

max verw. verlprys voor $p = \frac{1}{2}$

$= 40 \cdot \frac{1}{2} + 92 = 112$

3. a. $x_t + y_t \le$ [illegible] $\quad x_t, y_t \le 3$

$$
\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (0,1) \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (0,2) \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & \cdots \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \\
(1,0) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (1,1) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (1,2) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & \cdots \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \\
(2,0) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (2,1) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (2,2) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"] & \\
(3,0) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] & (3,1) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"] & &
\end{tikzcd}
$$

b. $(\lambda_1+\lambda_2)P_{00} = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{01}$

$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_{10} = \lambda_1 P_{00} + \mu_2 P_{11} + \mu_1 P$

$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_{20} = \lambda_1 P_{10} + \mu_2 P_{21} + \mu_1 P_3$

$(\mu_1+\lambda_2)P_{30} = \cancel{\mu_1} P_{20} + \mu_2 P_{31}$

$(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)P_{01} = \lambda_2 P_{00} + \mu_1 P_{11} + \mu_2 P_{02}$

$(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)P_{02} = \lambda_2 P_{01} + \mu_1 P_{12} + \mu_2 P_{03}$

$(\mu_2+\lambda_1)P_{03} = \lambda_2 P_{02} + \mu_1 P_{13}$

$(\mu_2+\mu_1+\lambda_1+\lambda_2)P_{11} = \lambda_2 P_{10} + \lambda_1 P_{01} + \mu_2 P$

$(\mu_2+\mu_1+\lambda_1+\lambda_2)P_{12} = \lambda_2 P_{12} + \lambda_1 P_{02} + \mu_2 P_{13}$

$(\mu_1+\mu_2)P_{13} = \lambda_2 P_{12} + \lambda_1 P_{03}$

$(\mu_2+\mu_1+\lambda_2+\lambda_1)P_{21} = \lambda_2 P_{20} + \lambda_1 P_{11} + \mu_2 P$

$(\mu_2+\mu_1)P_{22} = \lambda_2 P_{21} + \lambda_1 P_{12}$

$(\mu_2+\mu_1)P_{31} = \lambda_2 P_{30} + \lambda_1 P_{21}$

c

d. type 1 : $P_{10} + 2P_{20} + 3P_{30} + P_{11} + P_1$
$+ 2P_{21} + 2P_{22} + 3P_{31}$

(8)

toestand $= \{g, s\}$
beslissing $= \{0, 1\}$

$$V_g = \min \begin{cases} \cancel{\tfrac{7}{8} 200} \; 56 + \alpha\left(\frac{7}{8}V_g + \frac{1}{8}V_s\right) & 1 \\ \alpha\left(\frac{1}{8}V_g + \frac{7}{8}V_s\right) & 0 \end{cases}$$

$$V_s = \min \begin{cases} 56 + \alpha\left(\frac{7}{8}V_g + \frac{1}{8}V_s\right) & 1 \\ 200 + \alpha\left(\frac{1}{8}V_g + \frac{7}{8}V_s\right) & 0 \end{cases}$$

$$V_g = \min \begin{cases} 56 + \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{7}{8}V_g + \frac{1}{8}V_s\right) \\ \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}V_g + \frac{7}{8}V_s\right) \end{cases}$$

$$V_s = \min \begin{cases} 56 + \frac{4}{5}\left(\frac{7}{8}V_g + \frac{1}{8}V_s\right) \\ 200 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{8}V_g + \frac{7}{8}V_s\right) \end{cases}$$

$$\max \; V_g + V_s$$

$$V_g \leq 56 + \frac{7}{10}$$

[redacted]

19

Opgave 1 : Jonk of Seedorf ?

Guus Hiddink staat aan de vooravond van de achtste finale tegen Joegoslavië tijdens het WK voetbal in Frankrijk. Hij vraagt zich af of hij in de resterende wedstrijden (maximaal vier) Wim Jonk danwel Clarence Seedorf moet opstellen. De verwachte tegenstanders in de eventueel te spelen kwartfinale, halve finale en finale zijn resp. Argentinië, Brazilië en Frankrijk. Hoewel Guus Hiddink een lichte voorkeur heeft voor Jonk, heeft hij zich voorgenomen dat beide spelers in het hele toernooi - voor zover mogelijk - even vaak in de basis moeten zijn begonnen op het moment dat Nederland wordt uitgeschakeld. (Na even aantal spelen hebben ze dus evenveel in de basis gestaan, na een oneven aantal kan een van beide hooguit één wedstrijd meer hebben gespeeld.) In de voorgaande drie poulewedstrijden heeft Wim Jonk twee maal en Clarence Seedorf eenmaal deel uitgemaakt van de basisopstelling.

Guus Hiddink is nogal op de penning, en streeft ernaar de verwachte winstpremie die hij uiteindelijk van de KNVB zal ontvangen te maximaliseren. De vraag is dus welke speler hij in welke wedstrijd moet opstellen, teneinde aan deze doelstelling én de door hem gestelde voorwaarden te voldoen. De kansen op overwinningen tegen elk van de verwachte tegenstanders in de opeenvolgende alles-of-niets wedstrijden hangen af van de speler die hij opstelt. Na goed overleg met o.a. Johan Neeskens, Ronald Koeman en Frank Rijkaard, heeft hij deze kansen als volgt ingeschat:

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
achtste finale	Joegoslavië	0.80	0.70	25.000
kwartfinale	Argentinië	0.60	0.50	50.000
halve finale	Brazilië	0.50	0.40	100.000
finale	Frankrijk	0.70	0.60	250.000

Tabel met geschatte winstkansen en winstpremies

Mocht Nederland wereldkampioen worden, dan ontvangt Guus Hiddink maar liefst 25.000+50.000+100.000+250.000=425.000 gulden. Definieer nu $f_n(k)$ als de maximale verwachte premie vanaf wedstrijd n indien Wim Jonk in de voorafgaande n-1 wedstrijden k maal in de basis is begonnen.

a) Beschrijf in woorden de fasen, toestanden en beslissingen behorende bij dit stochastische dynamisch programmeringsprobleem.

b) Bepaal achtereenvolgens de fasen n, de toestandsruimte S_n in elke fase n, en de beslissingruimte $D_n(i)$ voor elke toestand $i \in S_n$ in elke fase n.

c) Geef de volledige recurrente betrekkingen (d.w.z. inclusief stopcriterium) voor de optimale waardefunctie. Licht zonodig de gebruikte variabelen toe.

d) Bepaal de optimale strategie voor Guus Hiddink, zodanig dat hij de maximale verwachte premie mee naar huis kan nemen.

e) Als het goed is blijkt uit de optimale strategie dat Clarence Seedorf tegen Joegoslavië in de basis zal beginnen. Kunt u hiervoor een verklaring geven?

Opgave 2 : Wilsum of Zalk ?

De veerdienst over de IJssel tussen Wilsum en Zalk wordt al jaren met opheffing bedreigd. De eigenaars van deze veerdienst hebben letterlijk en figuurlijk moeite hun hoofd boven water te houden, en zoeken naar mogelijkheden om efficiënter te kunnen opereren. Dit is de voornaamste reden dat de veerboot geen vaste vertrektijden heeft. Maar áls de veerboot vertrekt, dan is dat altijd op een veelvoud van 15 minuten (bijv. 11.00, 14.15 of 16.30 uur)

De veerboot doet er ruim 10 minuten over om van Wilsum naar Zalk, danwel van Zalk naar Wilsum te varen. De kosten hiervan bedragen ongeveer 50 cent per keer. Op de veerboot is ruimte voor maarliefst één auto, die voor de bescheiden prijs van één rijksdaalder wordt meegenomen. Voetgangers en fietsers mogen gratis mee, maar hebben daarentegen geen enkele invloed op de beslissing om al dan niet naar de overkant te varen.

Omdat er op geringe afstand van de veerdienst een brug is aangelegd, gaan arriverende automobolisten pas mee indien (i) de veerboot op dat moment aanwezig is bij danwel op weg is naar de aanlegplaats, en (ii) er nog geen andere auto's staan te wachten. Dit gedrag kan in zowel Wilsum als Zalk worden geobserveerd. De aankomstprocessen in Wilsum en Zalk zijn beide Poisson processen met een gemiddelde van 2 resp. 4 auto's per uur.

De eigenaren van de veerboot vragen zich af onder welke omstandigheden ze van Wilsum naar Zalk, danwel van Zalk naar Wilsum moeten varen, teneinde de verwachte verdisconteerde winst per kwartier (β=0.9) te maximaliseren. Dit probleem kan worden gemodelleerd als een Markov beslissings probleem in discrete tijd, waarbij de toestand (i,j,k) op tijdstip $t \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ correspondeert met de locatie $i \in \{W,Z\}$ van de veerboot, het aantal wachtende auto's $j \in \{0,1\}$ in Wilsum, en het aantal wachtende auto's $k \in \{0,1\}$ in Zalk.

a) Waarom zullen de toestanden W01, W11, Z10 en Z11 nooit voorkomen?

b) Benoem de resterende toestanden i en mogelijke beslissingen d behorende bij dit Markov beslissingsprobleem. Welke combinaties van toestanden en beslissingen liggen al bij voorbaat vast, en waarom?

c) Geef de matrix met overgangskansen $p(j \mid i,d)$ en verwachte directe opbrengsten $r(i,d)$.

d) Formuleer de Bellman optimaliteitsvergelijkingen.

e) Bepaal m.b.v. policy-iteration de optimale strategie, en beschrijf in woorden wat deze inhoudt.

f) Geef een LP-formulering voor het bepalen van de optimale strategie.

Opgave 3 : Janny, Conny of Betty ?

De personeelsadministratie van een gloeilampenfabriek in het zuiden des lands wordt bemand door 1 medewerkster (Janny) en 2 stagiaires (Conny en Betty). De afdeling heeft de beschikking over maar liefst één kopieerapparaat. Bij het gebruik ervan is de regel ingesteld dat medewerkers altijd voorrang hebben boven stagiaires. In de praktijk komt dit er op neer dat Janny het kopieerapparaat altijd kan en zal opeisen, ongeacht of er op dat moment al iemand aan het kopieren is.

De tijd die verstrijkt tussen het completeren van de ene en het aanbreken van de volgende kopieeropdracht voor Janny, is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 15 minuten. De duur van deze kopieeropdracht bezit eveneens een exponentiële verdeling met een gemiddelde van 3 minuten. Voor zowel Conny als Betty bedragen deze tijden achtereenvolgens 30 en 6 minuten.

Het hoofd van de afdeling wil weten hoeveel tijd er per dag aan wachten voor het kopieerapparaat verloren gaat. Van zijn collega's heeft hij vernomen dat hiertoe een wachtsysteem met toestanden (i,j) zal moeten worden ontwikkeld, waarbij i het aantal medewerkers en j het aantal stagiaires bij het kopieerapparaat weergeeft.

a) Teken in een plaatje de zes toestanden, de mogelijke toestandsovergangen en de bijbehorende overgangsintensiteiten. Beargumenteer uw antwoord.

b) Formuleer de evenwichtsvergelijkingen voor de kansen p(i,j) en los deze op.

De volgende vragen mogen eventueel worden uitgedrukt in de evenwichtskansen.

c) Bepaal de bezettingsgraad van het kopieerapparaat.

d) Bepaal het gemiddelde aantal stagiaires dat op een willekeurig moment bij het kopieerapparaat op haar beurt staat te wachten.

e) Bepaal de gemiddelde doorlooptijd (d.w.z. wachttijd plus kopieertijd) van een willekeurige kopieeropdracht voor zowel Janny, Conny als Betty.

f) Bepaal de kansverdeling van een aangesloten periode dat de afdeling onbemand is, d.w.z. iedereen bij het kopieerapparaat staat.

De verantwoordelijken van deze afdeling overwegen om eventueel een tweede kopieerapparaat aan te schaffen.

g) Wat verandert er in uw antwoorden op vraag a) indien er niet één maar twee kopieerapparaten op de afdeling staan?

Uitwerking Opgave 1

a) fasen (n) = wedstrijden
toestanden (k) = aantal keer dat Jonk gespeeld heeft
beslissing = Jonk of Seedorf opstellen

b) Guus heeft alleen keuzevrijheid als beide spelers even vaak gespeeld hebben:

n = {4,5,6,7}
S_4 = {2} , S_5 = {2} , S_6 = {2,3} , S_7 = {3}
D_4(2) = {S} , D_5(2) = {J,S}, D_6(2) = {J}, D_6(3) = {S}, D_7(3) = {J,S}

c) <u>Recurrente betrekking:</u>

$$f_n(k) = \max \begin{Bmatrix} p_n \cdot \{w_n + f_{n+1}(k+1)\} & \text{mits } k \le (n-1)/2 \rightarrow \text{Jonk opstellen} \\ q_n \cdot \{w_n + f_{n+1}(k)\} & \text{mits } k \ge (n-1)/2 \rightarrow \text{Seedorf opstellen} \end{Bmatrix} \begin{matrix} D \\ D \end{matrix}$$

<u>Stopcriterium:</u>

$$f_8(k) = 0$$

<u>Verklaring der variabelen:</u>

w_n is de winstpremie bij winst in wedstrijd n,
p_n is de kans op winst in wedstrijd n met Jonk,
q_n is de kans op winst in wedstrijd n met Seedorf.

d) f_8(.) = 0
e) f_7(3) = max {0.70*(250+0),0.60*(250+0)} = max {175,150} = 175 (Jonk)
f_6(2) = 0.50*(100+175) = 137.5 (Jonk)
f_6(3) = 0.40*(100+175) = 110 (Seedorf)
f_5(2) = max {0.60*(50+110),0.50*(50+137.5)} = max {96,93.75} = 96 (Jonk)
f_4(2) = 0.70*(25+96)=84.7 (Seedorf)

De maximale verwachte premie voor Guus bedraagt dus 84.700 gulden.

f) Hij zal wel moeten, want Wim Jonk "staat voor".

J
J
S
J
S

Uitwerking Opgave 2

a) W01/W11 : als de boot in Wilsum is, staan er nooit auto's in Zalk te wachten
Z10/Z11 : als de boot in Zalk is, staan er nooit auto's in Wilsum te wachten

b) toestanden : W00, W10, Z00 en Z01
beslissingen : varen of niet varen ?

<u>Observatie</u> : in Zalk komen de meeste auto's aan.

In toestand Z00 zal altijd beslissing 'niet varen' worden genomen. ← Bewijs dat maar!
In toestand W10 en Z01 zal altijd beslissing 'varen' worden genomen.
Het enige vraagteken is dus W00.

c) Daar komt-ie dan:

zen st

			p(j|i,d)			
i	*d*	*r(i,d)*	*j = W00*	*j = W10*	*j = Z00*	*j = Z01*
W00	varen	-0.5	0	0	0.135	0.865
W00	niet varen	0	0.368	0.632	0	0
W10	varen	+2	0	0	0.135	0.865
Z00	niet varen	0	0	0	0.135	0.865
Z01	varen	+2	0.368	0.632	0	0

de kansen horen bij 2x zo grote intensiteiten!

d) W00 = max {-0.5 + 0.1215 * Z00 + 0.7785 * Z01,0.3312 * W00 + 0.5688 * W10}
W10 = 2 + 0.1215 * Z00 + 0.7785 * Z01
Z00 = 0.1215 * Z00 + 0.7785 * Z01
Z01 = 2 + 0.3312 * W00 + 0.5688 * W10

e) Begin met 'niet varen' in W00 : W00 = 0.3312 * W00 + 0.5688 * W10
Oplossen levert: W00 = 13.03, W10 = 15.32, Z00 = 13.32, Z01 = 15.03

<u>Policy iteration levert:</u>

Varen : W00 = -0.5 + 0.1215 * 13.32 + 0.7785 * 15.03 = 12.82
Niet varen : W00 = 0.3312 * W00 + 0.5688 * W10 = 13.03

dus: $0.865 \neq 1 - e^{-4 \times \frac{1}{4}}$
maar $= 1 - e^{-8 \times \frac{1}{4}}$

De optimale oplossing is dus om in zowel Wilsum als Zalk pas te varen als er een auto staat te wachten. Naar de drukste kant (Zalk) varen is dus duurder.

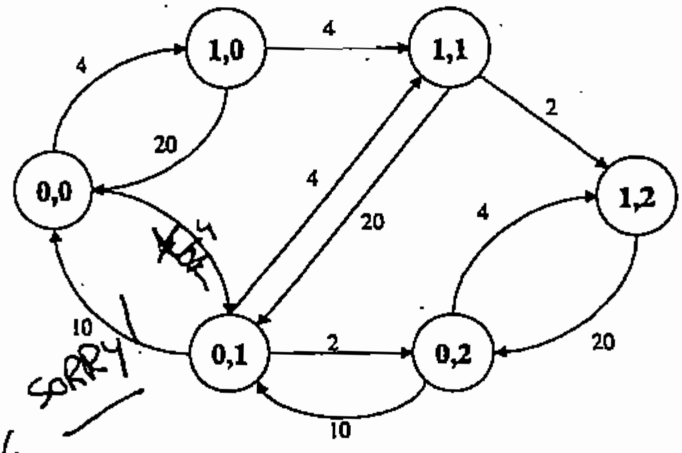
f) minimaliseer W00 + W10 + Z00 + Z01

zodanig dat
$$\begin{aligned} W00 &\geq -0.5 + 0.1215 * Z00 + 0.7785 * Z01 \\ W00 &\geq 0.3312 * W00 + 0.5688 * W10 \\ W10 &\geq 2 + 0.1215 * Z00 + 0.7785 * Z01 \\ Z00 &\geq 0.1215 * Z00 + 0.7785 * Z01 \\ Z01 &\geq 2 + 0.3312 * W00 + 0.5688 * W10 \end{aligned}$$

(19)

Uitwerkingen Opgave 3

a)



6

b) 8 ~~8~~ * P00 = 20 * P10 + 10 * P01
24 * P10 = 4 * P00
16 * P01 = 4 * P00 + 20 * P11 + 10 * P02
22 * P11 = 4 * P10 + 4 * P01
14 * P02 = 2 * P01 + 20 * P12
20 * P12 = 2 * P11 + 4 * P02
P00 + P10 + P01 + P11 + P02 + P12 = 1

Oplossen levert:

P00 = 0.527
P10 = 0.088
P01 = 0.245
P11 = 0.061
P02 = 0.061
P12 = 0.028

c) 1-P00 = 0.473

d) $E(N_q)$ = P11 + P02 + 2 * P12 = 0.178

e) λ = 4 * P00 + 4 * P10 + 2 * P01 + 2 * P11 = 3.07 per uur
Little : E(W) = 60 * 0.178 / 3.07 = 3.48 minuten

Janny : 0 + 3 = 3 minuten
Conny/Betty : 3.48 + 6 = 9.48 minuten

f) ~~3 minuten~~ exponentieel verdeeld met gemiddelde 3 min.

g) vertrekintensiteiten vanuit (1,1), (0,2) en (1,2) worden 30, 20 en 30

(20)

Faculteit der Toegepaste Wiskunde II

Kenmerk: TW98/T-OR/11/mb Remco

Datum: 17 maart 1998

S.HAMMINGA
EMMASTRAAT 167
7513 BC
ENSCHEDE

Universiteit Twente

Tentamen Operationele Research II

~~Vrijdag 20 maart 1998, 9.00 – 12.00 uur~~

code 158006

[recurrente betrekking]

1. Anand speelt tegen Kramnik twee schaakpartijen. Een gewonnen partij levert 1 punt op, een remise $\frac{1}{2}$ punt. Nadat de twee partijen zijn gespeeld is degene met de meeste punten uiteraard de winnaar. Eindigen beide spelers gelijk, dan wordt net zo lang doorgespeeld totdat één van de twee spelers heeft gewonnen.
In iedere partij kan Anand kiezen uit twee speelwijzen: agressief of behoudend. Speelt hij agressief dan wint hij de partij met kans 0.45 en verliest met kans 0.55. Speelt hij behoudend dan maakt hij remise met kans 0.9 en verliest met kans 0.1. (Er wordt geen onderscheid gemaakt tussen het spelen met de witte of zwarte stukken).
Anand's doel is het maximaliseren van de kans dat hij de winnaar wordt. [De uitkomsten van de opvolgende partijen zijn onderling onafhankelijk, zodat kansen vermenigvuldigd mogen worden].

   a. Hoe groot is de maximale kans voor Anand om te winnen, indien beide spelers na de twee partijtjes evenveel punten hebben en welke speelwijze moet Anand hiervoor kiezen.

   b. Bepaal Anand's optimale speelstrategie *m.b.v. dynamische programmering* [Aanwijzing: Kies als toestanden de uitkomsten van de reeds gespeelde partij(en), (indien van toepassing). Bedenk dat de optimale waardefunctie de maximale kans voor Anand is om winnaar te worden gegeven de fase en de toestand.]

   c. Hoe groot is de maximale kans en wat is de optimale speelwijze in de eerste partij.

2. Een produktiemachine kan zich aan het einde van een "dag" in drie toestanden bevinden: toestand 0 (=goed), 1 (=matig) of 2 (=slecht). De toestand kan met zekerheid worden afgeleid uit het percentage defecte onderdelen dat de afgelopen dag is geproduceerd. Is de toestand aan het einde van dag i gelijk aan 2 dan wordt de machine gerepareerd en is de begintoestand op dag $i+1$ weer 0. Is de eindtoestand op dag i gelijk aan 1 dan heeft men de keuze uit *niet* repareren of *wel* repareren. In het eerste geval is de begintoestand op dag $i+1$ weer 1, in het tweede geval 0. De overgangskansen p_{nm} tussen de toestanden aan het begin van de dag (toestand n) en het einde van de dag (toestand m) zijn bekend:

$$p_{01} = \frac{1}{4} \qquad p_{00} = \frac{3}{4} \qquad p_{12} = \frac{1}{2} \qquad p_{11} = \frac{1}{2}$$

De reparatiekosten bedragen [redacted] 8 per reparatie (de reparatietijd wordt verwaarloosd).
De operationele kosten op een dag $c(i)$, $i = 0, 1$, hangen op de volgende manier af van de begintoestand:
$c(0) = 10$ en $c(1) = 16$.

moeilijk

Z.O.Z.

20

Gezocht wordt een reparatiepolitiek welke de verwachte totale verdisconteerde kosten over een oneindige horizon minimaliseert. De disconteringsfactor is α, $(0 < \alpha < 1)$.

a. Geef de optimaliteitsvergelijkingen; verklaar de betekenis van de optimale waardefunctie die hierin voorkomt.

b. Geef twee iteraties van de waarde-iteratiemethode.

c. Bepaal de optimale politiek als functie van α m.b.v. de politiek-iteratiemethode.

d. Formuleer het LP-model voor dit probleem.

3. Beschouw het volgende wachtsysteem. Individuele klanten arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ. Bediening geschiedt steeds in groepjes van 2 klanten; dit betekent o.a. dat de lokettist wacht tot er 2 klanten zijn alvorens hij de bediening start. De groepsbedieningsduur is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde μ^{-1}.
De wachtruimte kan niet meer dan 2 klanten bevatten.
Laat $Z(t)$ het aantal klanten in het systeem zijn op tijdstip t.
Beantwoord de volgende vragen:

a. Hoe ziet het transitiediagram eruit van $\{Z(t),\ t \geq 0\}$.

b. Hoe luiden de (globale) evenwichtsvergelijkingen voor $\{Z(t)\}$.

c. Bepaal de stationaire kansverdeling van $\{Z(t)\}$ als oplossing van de evenwichtsvergelijkingen.

De volgende vragen mogen beantwoord worden in termen van de stationaire kansen.

d. Geef een uitdrukking voor het gemiddeld aantal klanten in het systeem.

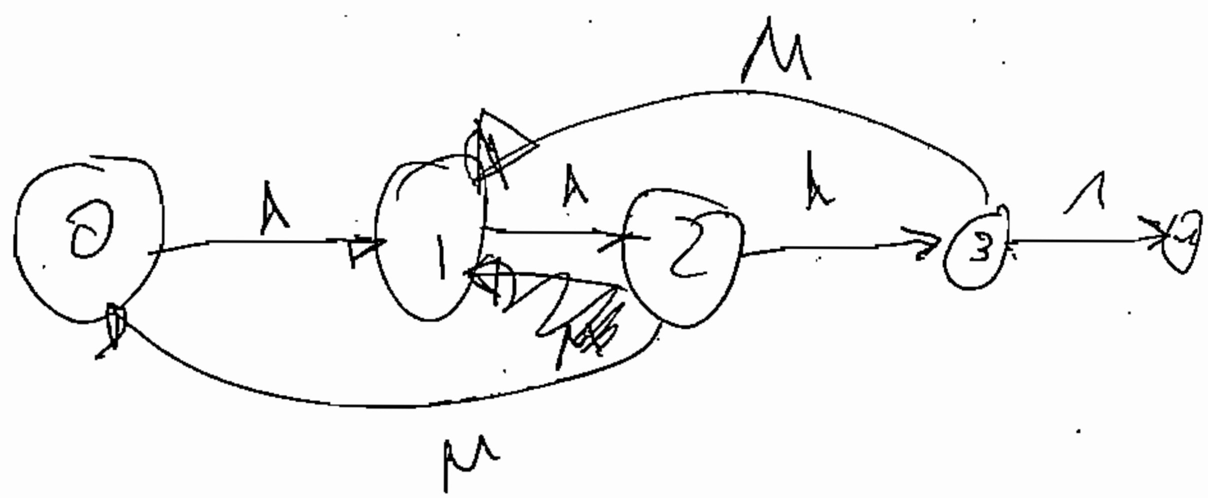
e. Hoe groot is het gemiddeld aantal klanten dat het systeem per tijdseenheid binnen gaat.

f. Hoe groot is de gemiddelde wachttijd.

g. Hoe groot is de bezettingsgraad van het loket.

h. Hoe groot is het gemiddeld aantal bedieningen per tijdseenheid.

i. Hoe groot is de gemiddelde lengte van de bezetperiode.



tent nr 2 20 maart 1998

1 a 0,45

b 0 i

1 0

2 0, ½, 1

3 0, ½, 1, 1½, 2

$f_3(1) = 0{,}45$

$f_3(1\tfrac{1}{2}, 2) = 1$

$f_3(0, \tfrac{1}{2}) = 0$

$$f_2(0) = \max \begin{cases} 0{,}45\, f_3(1) + 0{,}55\, f_3(0) = 0{,}2025^{*} & a \\ 0{,}90\, f_3(\tfrac{1}{2}) + 0{,}10\, f_3(0) = 0 & b \end{cases}$$

$$f_3(\tfrac{1}{2}) = \max \begin{cases} 0{,}45\, f_3(1\tfrac{1}{2}) + 0{,}55\, f_3(\tfrac{1}{2}) = 0{,}45^{*} & a \\ 0{,}90\, f_3(1) + 0{,}10\, f_3(\tfrac{1}{2}) = 0{,}405 & b \end{cases}$$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} 0{,}45\, f_3(2) + 0{,}55\, f_3(1) = 0{,}6475 & a \\ 0{,}90\, f_3(1\tfrac{1}{2}) + 0{,}10\, f_3(1) = 0{,}945^{*} & b \end{cases}$$

$$f_1(0) = \max \begin{cases} 0{,}45\, f_2(1) + 0{,}55\, f_2(0) = 0{,}536625^{*} & a \\ 0{,}90\, f_2(\tfrac{1}{2}) + 0{,}10\, f_2(0) = 0{,}42525 & b \end{cases}$$

c ~~1e spel agressief~~

~~bij winst~~ ~~bij verlies~~

~~2e spel behoedzaam~~ ~~agressief~~

~~bij winst~~

$$1{:}\ a \begin{cases} \xrightarrow{w} 2{:}\ b \\ \xrightarrow{v} 2{:}\ a \end{cases}$$

3e spel altijd a

(20)

(INVULLEN IN BLOKLETTERS)

1) TENTAMEN / EXAMEN	vak	datum	bladnr.
	vaknr.	studierichting	groepnr.
naam / studentnr.	voorl. / geb.datum	maart 1998	

Opgave 1

$\{0,1\}$

punten

$$f_1(i) = \max \begin{cases} 0.9 f_2(i+\tfrac{1}{2}) + 0.1 \ldots \\ 0.45 f_2(i+1) + 0. \ldots \end{cases}$$

(a) 0.45 ; aggressief spelen

(b)

FASE I

$f_2(WR) = f_2(RW) = f_2(WW) = 1$

$f_2(RV) = f_2(VR) = f(VV) = 0.$

$f_2(WV) = f_2(VW) = f_2(RR) = 0.45$

FASE II

$$f_1(W) = \max \begin{cases} 0.9 f_2(WR) + 0.1 f_2(WV) = \underline{0.945} & [B] \\ 0.45 f_2(WW) + 0.55 f_2(WV) = 0.6975 & [A] \end{cases}$$

$$f_1(R) = \max \begin{cases} 0.9 f_2(RR) + 0.1 f_2(RV) = 0.405 & [B] \\ 0.45 f_2(RW) + 0.55 f_2(RV) = \underline{0.45} & [A] \end{cases}$$

$$f_1(V) = \max \begin{cases} 0.9 f_2(VR) + 0.1 f_2(VV) = \ldots & [B] \\ 0.45 f_2(VW) + 0.55 f_2(VV) = \underline{0.2025} & [A] \end{cases}$$

FASE III

$$f_0 = \max \begin{cases} 0.9 f_1(R) + 0.1 f_1(V) = 0.42525 & [B] \\ 0.45 f_1(W) + 0.55 f_1(V) = \underline{0.5366} & [A] \end{cases}$$

max-kans $= 0.5366$

In eerste partij moet A. aggressief spelen.

1) Aankruisen wat van toepassing is

p. 2

(a) $f_0 = 10 + \alpha\left(\frac{3}{4}f_0 + \frac{1}{4}f_1\right)$

$$f_1 = \min\begin{cases} 18 + \alpha\left(\frac{3}{4}f_0 + \frac{1}{4}f_1\right) & [R] \\ 16 + \alpha\left(\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\right) & [NR] \end{cases}$$

$$f_2 = 18 + \alpha\left(\frac{3}{4}f_0 + \frac{1}{4}f_1\right)$$

Opm: Het systeem wordt steeds beschouwd aan 't einde van de dag.

(b) $f_0^{(n)} = 10 + \alpha\left(\frac{3}{4}f_0^{(n-1)} + \frac{1}{4}f_1^{(n-1)}\right)$

$$f_1^{(n)} = \min\begin{cases} 18 + \alpha\left(\frac{3}{4}f_0^{(n-1)} + \frac{1}{4}f_1^{(n-1)}\right) \\ 16 + \alpha\left(\frac{1}{2}f_1^{(n-1)} + \frac{1}{2}f_2^{(n-1)}\right) \end{cases}$$

$$f_2^{(n)} = 18 + \alpha\left(\frac{3}{4}f_0^{(n-1)} + \frac{1}{4}f_1^{(n-1)}\right) \qquad n \geq 2$$

Stel $f_i^{(1)} = 0 \implies f_0^{(2)} = 10$, $f_1^{(2)} = \min(18,16) = 16$, $f_2^{(2)} = 18$

$f_0^{(3)} = 10 + \alpha\left(\frac{3}{4} * 10 + \frac{1}{4} * 16\right) = 10 + 11\frac{1}{2}\cdot\alpha$

$$f_1^{(3)} = \min\left\{\begin{matrix} 18 + \underbrace{11\tfrac{1}{2}}_{\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{1}{4}\cdot 16}\cdot\alpha \\ 16 + \underbrace{17}_{\frac{1}{2}\cdot 16 + \frac{1}{2}\cdot 18}\cdot\alpha \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 18 + 11\tfrac{1}{2}\alpha & \alpha \leq \frac{4}{11} \\ = 16 + 17\alpha & \alpha > \frac{4}{11} \end{matrix}$$

$$f_2^{(3)} = 18 + 11\tfrac{1}{2}\alpha.$$

[vervolg 2] mot 98

(20)

3) Kies als startpolitiek $\pi = (\delta, \delta, \ldots)$

met $\delta(0) = NR$, $\delta(1) = R$, $\delta(2) = R$

<u>Waardebepaling</u>: $f_0^{(1)} = 10 + \alpha\left(\frac{3}{4} f_0^{(1)} + \frac{1}{4} f_1^{(1)}\right)$

$$f_1^{(1)} = 18 + \alpha\left(\frac{3}{4} f_0^{(1)} + \frac{1}{4} f_1^{(1)}\right)$$

$$f_2^{(1)} = 18 + \alpha\left(\frac{3}{4} f_0^{(1)} + \frac{1}{4} f_1^{(1)}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f_0^{(1)} = \frac{10+2\alpha}{1-\alpha} \qquad f_1^{(1)} = f_2^{(1)} = \frac{18-6\alpha}{1-\alpha}$$

<u>teststap</u> (alleen toestand 1)

$$\min \begin{cases} \dfrac{18-6\alpha}{1-\alpha} & [R] \\ 16 + \alpha\left\{\frac{1}{2} \cdot \dfrac{18-6\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \dfrac{18-6\alpha}{1-\alpha}\right\} \end{cases}$$

Startpolitiek is optimaal indien

$$\frac{18-6\alpha}{1-\alpha} \leq 16 + \alpha \cdot \frac{18-6\alpha}{1-\alpha} \iff 18-6\alpha \leq 16 \iff$$

$\Longrightarrow \alpha \geq \frac{1}{3}$, want blijft ongewijzigd.

Omdat er maar 2 stationaire politieken zijn is de politiek waarbij niet wordt gerepareerd optimaal indien $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$.

4) max $x_0 + x_1 + x_2$

$$x_0 = 10 + \alpha\left(\frac{3}{4} x_0 + \frac{1}{4} x_1\right)$$

$$x_1 \leq 18 + \alpha\left(\frac{3}{4} x_0 + \frac{1}{4} x_1\right)$$

$$x_1 \leq 16 + \alpha\left(\frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} x_1\right)$$

$$x_2 \leq 18 + \alpha\left(\frac{3}{4} x_0 + \frac{1}{4} x_1\right)$$

3 a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\lambda"] & 1 \arrow[r, "\lambda"] & 2 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[ll, bend left, "\mu"] & 3 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[ll, bend right, "\mu"'] & 4 \arrow[ll, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

b. $\lambda p_0 = \mu p_2$

$\lambda p_1 = \mu p_3 + \lambda p_0$

$(\mu+\lambda) p_2 = \mu p_4 + \lambda p_1$

$(\mu+\lambda) p_3 = \lambda p_2$

$\mu p_4 = \lambda p_3$

c. $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

$\rho = \lambda/\mu$

$p_2 = \rho p_0$

$\mu p_3 = \lambda p_1 - \lambda p_0$

$p_3 = \rho p_1 - \rho p_0$

$p_3 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} p_2 = \frac{\rho}{1+\rho} p_2 = \frac{\rho^2}{1+\rho} p_0$

$p_4 = \rho p_3 = \frac{\rho^3}{1+\rho} p_0$

$p_1 = \rho^{-1} p_3 + p_0 = \frac{\rho}{1+\rho} p_0 + p_0 = \frac{1+2\rho}{1+\rho} p_0$

$p_0 \cancel{\neq} = 1 - \rho^{-1} p_3 - p_0 - \rho p_0 - \frac{\rho^2}{1+\rho} p_0 - \frac{\rho^3}{1+\rho} p_0$

$= 1 - \frac{1+2\rho}{1+\rho} p_0 - \rho p_0 - \frac{\rho^2}{1+\rho} p_0 - \frac{\rho^3}{1+\rho} p_0$

$= 1 - \frac{\rho^3+\rho^2+2\rho+1}{1+\rho} p_0 - \rho p_0$

d. $1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4$

e. $\lambda p_0 + \lambda p_1 + \lambda p_2 + \lambda p_3$

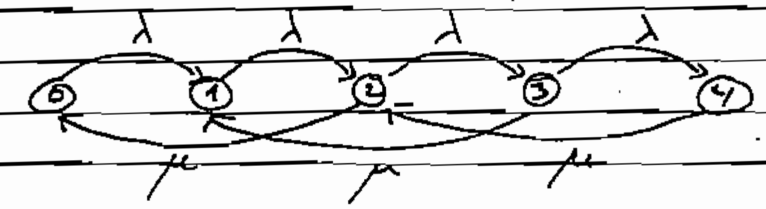
f. $(p_1 + p_3 + 2p_4) / \lambda(1-p_4)$

g. $1 - p_0 - p_1$

h. $\mu(p_2 + p_3 + p_4)$

Opg 3

(a)



b)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda P_0 = \mu P_2 \\ \lambda P_1 = \lambda P_0 + \mu P_3 \\ (\lambda+\mu) P_2 = \lambda P_1 + \mu P_4 \\ (\lambda+\mu) P_3 = \lambda P_2 \\ \mu P_4 = \lambda P_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_2 = \rho P_0 \\ P_3 = \frac{\rho}{1+\rho} P_2 = \frac{\rho^2}{1+\rho} P_0 \\ P_4 = \rho P_3 = \frac{\rho^3}{1+\rho} P_0 \end{array}$$

$$P_1 = \left(1 + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho^2}{1+\rho}\right) P_0 = \frac{1+2\rho}{1+\rho}$$

$$\sum_{i=0}^{4} P_i = 1 \Rightarrow P_0 = \left[2 + 2\rho + \frac{\rho^3}{1+\rho}\right]^{-1}$$

d) $\sum_{i=1}^{4} i P_i = EZ$

e) $\lambda(1-P_4)$ of $2\mu(P_2+P_3+P_4)$.

f) $\frac{EZ}{\lambda(1-P_4)} - \frac{1}{\mu}$ of $\frac{EN_W}{\lambda(1-P_4)} = \frac{P_1+P_3+2P_4}{\lambda(1-P_4)}$

g) $1 - P_0 - P_1$

h) $\mu(P_2+P_3+P_4)$

i) Stel c = gem. lengte bezetcyclus $\quad c = x+y$

x = " " bezetperiode $\quad x+y$

y = " " "idle" period

Er geldt (i) $y = \frac{P_0}{P_0+P_1} \cdot \frac{2}{\lambda} + \frac{P_1}{P_0+P_1} \cdot \frac{1}{\lambda}$

(ii) $= 1 - P_0 - P_1 = \frac{x}{c} = \frac{x}{x+y}$

$\Rightarrow x = \frac{1-P_0-P_1}{P_0+P_1}\left[\frac{1}{\lambda} + \ldots\right.$

Recurrente betrekking

(21)

Opgave 1

Een werkzoekende en op geld beluste jongeman heeft zich bij het arbeidsbureau ingeschreven om een zo aantrekkelijk mogelijke baan te vinden, d.w.z. met een zo hoog mogelijk inkomen. Het arbeidsbureau heeft hem gewaarschuwd dat zijn uitkering zal worden ingetrokken indien hij drie maal op rij een aanbieding naast zich neer legt. Hij zal de derde en laatste aanbieding dan ook altijd accepteren, ook als het hierbij behorende inkomen nogal laag uitvalt. De jongeman vraagt zich af in welke gevallen hij een aanbieding moet accepteren, en wanneer juist niet, teneinde een zo hoog mogelijk inkomen te realiseren. Hij heeft hiertoe een onderverdeling gemaakt in zeven inkomensschalen, en de bijbehorende kansen m.b.v. diverse jaarverslagen als volgt ingeschat:

schaal	1	2	3	4	5	6	7
inkomen	<1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	>4000
kans	15 %	40 %	25 %	10 %	5 %	3 %	2 %

Met andere woorden, de kans dat de eerste baan die hem wordt aangeboden in schaal 3 valt, is gelijk aan 25%. Hetzelfde geldt voor de (eventuele) tweede en derde aanbieding.

(a) Benoem de fasen n, toestanden i, beslissingen d en optimale waardefunctie $f_n(i)$ behorende bij dit stochastische dynamisch programmeringsprobleem.

(b) Geef de volledige recurrente betrekkingen voor de optimale waardefunctie.

(c) Bepaal de optimale strategie en beschrijf in woorden wat deze inhoudt. Hoeveel bedraagt de verwachte inkomensschaal?

(d) Hoeveel zou de verwachte inkomensschaal bedragen indien de jongeman de eerste twee banen alleen accepteert indien deze in schaal 5 of hoger valt?

ANDERS

markov

Uitwisseling klopt niet.

(21)

Opgave 2

Op een boorplatform staan drie grote boorinstallaties, die ieder voor zich aan storingen onderhevig zijn. Voor storingen onder het wateroppervlak moet een gespecialiseerd duikteam worden opgeroepen, dat per helikopter wordt overgevlogen. De kosten van een dergelijke operatie zijn opgebouwd uit 50.000 gulden "voorrijkosten" vermeerderd met 25.000 gulden per installatie. De capaciteit van het duikteam is zodanig dat de kapotte installaties na precies één week weer operationeel zijn.

Om veiligheidsredenen moeten alle boorinstallaties tijdens de onderhoudswerkzaamheden worden stilgelegd. Zodoende kan het voordelig zijn om meerdere installaties tegelijkertijd te laten repareren. Aan de andere kant zijn ook kosten verbonden aan het stilstaan van één of meer installaties. Deze kosten bedragen 50.000 gulden per installatie per week. Aan het begin van iedere week moet op grond van het aantal buiten bedrijf zijnde installaties besloten worden of het duikteam zal worden opgeroepen.

De levensduur van een boorinstallatie, d.w.z. de tijd die verstrijkt tussen twee opeenvolgende storingen waarvoor het duikteam moet worden opgeroepen, bezit een geheugenloze verdeling met een gemiddelde van 5 weken. Met andere woorden, de kans dat een willekeurige installatie in een willekeurige week kapot gaat, bedraagt 20%, mits deze installatie in gebruik is wel te verstaan.

(a) Dit probleem kan worden gemodelleerd als een Markov beslissings probleem. Wat definieert u als toestanden i, beslissingen d en optimale waardefunctie $V(i)$?

(b) Bepaal de verwachte directe kosten $r(i,d)$ en overgangskansen $p(j|i,d)$ voor iedere toestand i en beslissing d.

(c) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen bij een verdisconteringsfactor van $\beta = 0.95$ per week.

Op dit moment hanteert het booreiland de volgende werkwijze: als aan het begin van de week één of meer installaties buiten bedrijf zijn, worden alle installaties stilgelegd en het duikteam opgeroepen om de kapotte installatie(s) te repareren.

(d) Bereken de huidige verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon, als op tijdstip $t = 0$ alle installaties operationeel zijn.

(e) Is de huidige strategie optimaal? Zo niet, geef dan minstens één betere strategie.

(f) Geef een LP-formulering waarmee de optimale strategie kan worden berekend.

(g) Hoe kunt u de optimale strategie uit de oplossing van dit LP-probleem aflezen?

Wachtrij

(21)

Opgave 3

veel uitgeschiede

Bij een supermarkt arriveren klanten met een intensiteit van $\lambda = \frac{1}{2}$ per minuut. De supermarkt beschikt over twee kassa's, die gebruik maken van een gezamenlijke wachtrij van klanten. Kassa 1 is altijd bemand. Kassa 2 daarentegen wordt pas geopend indien er drie of meer klanten in de wachtrij staan, en wordt pas weer gesloten indien de dienstdoende kassiere zonder werk (lees: klanten) komt te zitten. De bedieningsduur van een klant bezit een exponentiele verdeling met een gemiddelde van $\mu^{-1} = 1$ minuut.

(a) Teken het transitiediagram behorende bij dit wachtsysteem, en bediscussieer de door u gehanteerde toestanden, toestandsovergangen en overgangsintensiteiten (hint: definieer als toestanden (i, j) waarbij i staat voor het aantal klanten en j voor het aantal kassieres).

(b) Formuleer de (stationaire) evenwichtsvergelijkingen en bepaal hiermee de (stationaire) evenwichtskansen.

De volgende vragen moeten worden beantwoord in termen van de aankomstintensiteit λ, de vertrekintensiteit μ, en de evenwichtskansen $P(i, j)$. De gevraagde berekeningen hoeven dus niet te worden uitgevoerd (mag wel).

(c) Bepaal het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij.

(d) Bepaal de gemiddelde wachttijd per klant.

(e) Hoeveel kassieres zijn er gemiddeld aan het werk ?

(f) Hoeveel procent van de tijd zijn alle kassa's bezet ?

(g) Wat is de bezettingsgraad van kassa 2 ?

(h) Bepaal de gemiddelde lengte van een aaneengesloten periode waarin kassa 1 niets te doen heeft.

21

Opgave 1

(a) fasen n = ~~aantal afgewezen~~ rangnummer aanbod $n = 1,2,3$.

toestand $i = 1,2,\dots,7$ aangeboden schaal

beslissing : accepteren of afwijzen

$f_n(i)$ = maximaal verwachte schaal, indien op n^e aanbieding een schaal i wordt aangeboden.

(b)/(c) $f_3(i) = i$, $i = 1,2,\dots,7$

$$f_2(i) = \max \begin{cases} i & \text{accepteren} \\ \sum_{i=1}^{7} p_i f_3(i) = \frac{15+80+75+40+25+18+14}{100} = 2{,}67 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow f_2(i) &= i & i \geq 3 \quad &[\text{accepteren!}] \\ &= 2{,}67 & i \leq 2 \quad &[\text{niet accepteren}] \end{aligned}}$$

$$f_1(i) = \max \begin{cases} i & \text{accept.} \\ \sum_{i=1}^{7} p_i f_2(i) & \text{niet acc.} \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} i \\ \frac{15}{100} \times 2.67 + \frac{40}{100} \times 2.67 + \sum_{j=3}^{7} j p_j = 3.322 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(i) &= i & i \geq 4 \quad &[\text{acc.}] \\ &= 3.32 & 1 \leq i \leq 3 \quad &[\text{niet acc}]. \end{aligned}}$$

$$f^* = 3.32 \cdot \left(\frac{15}{100} + \frac{40}{100} + \frac{25}{100}\right) + 4 \times \frac{10}{100} + 5 \times \frac{5}{100} + 6 \times \frac{3}{100} + 7 \times \frac{2}{100}$$

$= \underline{3.63}$ (= optimale verwachte inkomensschaal)

(21)

(d) $g_3(i) = i \quad 1 \le i \le 7$

$g_2(i) = i \quad i \geq 5$

$= \sum_{j=1}^{7} p_j \, g_3(j) = 2.67$

$g_1(i) = i \quad i \geq 5$

$= 2.67 \left(\sum_1^4 p_i \right) + \sum_5^7 j p_j = 2.97 \quad 1 \le i \le 4$

$g^* = 2.97 * 0.9 + \frac{5}{100} * 5 + \frac{3}{100} * 6 + \frac{2}{100} * 7 = \underline{\underline{3.24}}$

Opgave 2

(a) toestanden $S = \{0, 1, 2, 3\} = \{\#$ buiten bedrijf$\}$

beslissingen :

in 0 : duikteam niet laten komen [Opm: preventief onderhoud heeft geen zin, wegens de geheugenloosheid].

1 : {niet , 1 repareren}

2 : {niet , 1 rep. , 2 rep}

3 : {niet , 1 , 2 , 3 rep }.

$V(i)$ = minimale verwachte contante waarde v.d. kosten over een oneindige horizon indien de toestand op maandag v.d. eerste week van de horizon i is ~~bedraagt~~.

(21)

1 $\{r(i,d)\}$

		niet	1	2	3
	0	0	X	X	X
	1	50	75	X	X
i	2	100	175	200	X
	3	150	225	250	275

d

$\underbrace{150}_{\text{stilstands-kosten}} + \underbrace{\cancel{100}\ 50}_{\text{vervrij-kosten}} + \underbrace{2 \times 25}_{\text{reparatie-kosten}}$

$\{p(j \mid i,d)\}$ overgangskansen

$p(0 \mid 0,n) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$ $\quad p(1 \mid 0,n) = \binom{3}{1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$

$p(2 \mid 0,n) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5} = \frac{12}{125}$ $\quad p(3 \mid 0,n) = \frac{1}{125}$

$p(1 \mid 1,n) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ $\quad p(2 \mid 1,n) = \binom{2}{1}\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{25}$

$p(3 \mid 1,n) = \frac{1}{25}$ $\quad p(2 \mid 2,n) = \frac{4}{5}$ $\quad p(3 \mid 2,n) = \frac{1}{5}$

$p(0 \mid 1,1) = 1$ $\quad p(1 \mid 2,1) = p(0 \mid 2,2) = p(3 \mid 3,n) = p(2 \mid 3,1) = p(1 \mid 3,2)$

$= p(0 \mid 3,3) = 1$

Opm: Er wordt bij de uitwerking van gekozen installaties pas aan 't einde v.d. week kapot te laten gaan, zodat een installatie ook bij een week waarin hij kapot gaat volledig productief is (⇒ dus geen stilstandskosten).

(21)

(c) Optimaliteitsvergelijkingen

$$V(0) = 0.95 \left\{ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \left(\tfrac{1}{5}\right)^k \left(\tfrac{4}{5}\right)^{3-k} V(k) \right\}$$

$$= 0.95 \left\{ \tfrac{64}{125} V(0) + \tfrac{48}{125} V(1) + \tfrac{12}{125} V(2) + \tfrac{1}{125} V(3) \right\}$$

$$V(1) = \min \begin{cases} 50 + 0.95 \left\{ \tfrac{16}{25} V(1) + \tfrac{8}{25} V(2) + \tfrac{1}{25} V(3) \right\} & [n] \\ 75 + 0.95\, V(0) & [1 \text{ rep}] \end{cases}$$

$$V(2) = \min \begin{cases} 100 + 0.95 \left\{ \tfrac{4}{5} V(2) + \tfrac{1}{5} V(3) \right\} & [n] \\ 175 + 0.95\, V(1) & [1 \text{ rep.}] \\ 200 + 0.95\, V(0) & [2 \text{ rep}] \end{cases}$$

$$V(3) = \min \begin{cases} 150 + 0.95\, V(3) & [n] \\ 225 + 0.95\, V(2) & [1] \\ 250 + 0.95\, V(1) & [2] \\ 275 + 0.95\, V(0) & [3] \end{cases}$$

(d) Politiek : steeds <u>alle</u> defecte installaties repareren.

$V_\pi(1) = 75 + 0.95\, V_\pi(0)$

$V_\pi(2) = 200 + 0.95\, V_\pi(0)$

$V_\pi(3) = 275 + 0.95\, V_\pi(0)$

Dus

$$V_\pi(0) = 0.95 \left\{ \tfrac{64}{125} V_\pi(0) + \tfrac{48}{125} \left(75 + 0.95 V_\pi(0)\right) + \tfrac{12}{125} \left(200 + 0.95 V_\pi(0)\right) + \tfrac{1}{125} \left(27\ldots\right.\right.$$

$= \cancel{0.95 \ldots V_\pi(0)}$

$\Rightarrow V_\pi(0) \simeq \underline{\underline{652}} \quad V_\pi(1) = 694 \quad V_\pi(2) = 819 \quad V_\pi(3) = 894$

gevraagde antwoord.

(e) Pas Politiek-iteratie algoritme toe, met als startpolitiek de onder (d) beschouwde politiek; de waardebepaling is onder (d) reeds uitgevoerd!

Beschouw toestand 3.

$$\min \begin{cases} 150 + 0.95 * 894 = 999 \\ 225 + 0.95 * 819 = 1003 \\ 250 + 0.95 * 694 = 909 \\ 270 + 0.95 * 652 = 894 \quad [3] \leftarrow \text{minimum} \end{cases}$$

$\delta_2(3) = \delta_1(3)$

Beschouw toestand 2:

$$\min \begin{cases} 100 + 0.95 \left\{ \frac{4}{5} * 819 + \frac{1}{5} * 894 \right\} = 892 \\ 175 + 0.95 * 694 = 834 \\ 200 + 0.95 * 652 = 824 \quad [2] \leftarrow \text{minimum} \end{cases}$$

$\delta_2(2) = \delta_1(2)$

Beschouw toestand 1:

$$\min \begin{cases} 50 + 0.95 \left\{ \frac{16}{25} * 694 + \frac{8}{25} * 819 + \frac{1}{25} * 894 \right\} = 743 \\ 75 + 0.95 * 652 = 694 \quad [1] \leftarrow \text{minimum} \end{cases}$$

$\delta_2(1) = \delta_1(1)$

Omdat $\delta_2(i) = \delta_1(i) \quad i = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ Politiek optimaal.

(f) $$\underline{\max} \sum_{i=0}^{3} V(i)$$

$$a \left\{ V(0) = 0.95 \left\{ \frac{64}{125} V(0) + \frac{48}{125} V(1) + \frac{12}{125} V(2) + \frac{1}{125} V(3) \right\} \right.$$

$$b \begin{cases} V(1) \leqq 50 + 0.95 \left\{ \frac{16}{25} V(1) + \frac{8}{25} V(2) + \frac{1}{25} V(3) \right\} \\ V(1) \leq 75 + 0.95\, V(0) \end{cases}$$

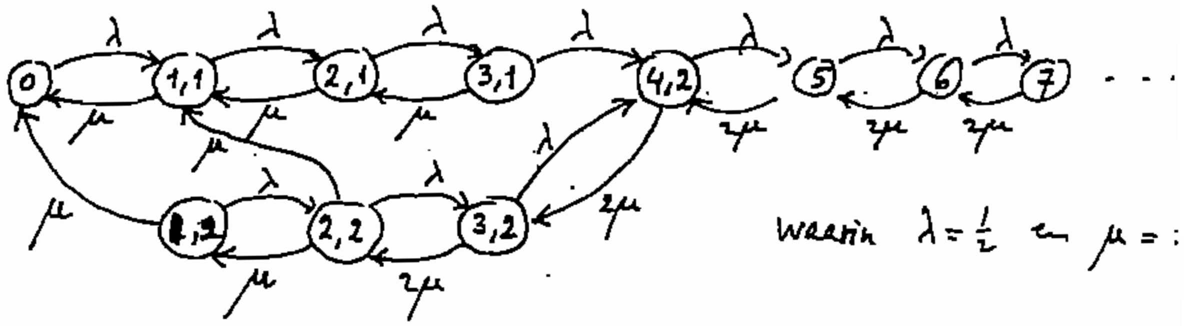
$$c \begin{cases} V(2) \leq 100 + 0.95 \left\{ \frac{4}{5} V(2) + \frac{1}{5} V(3) \right\} \\ V(2) \leq 175 + 0.95\, V(1) \\ V(2) \leq 200 + 0.95\, V(0) \end{cases}$$

$$d \begin{cases} V(3) \leq 150 + 0.95\, V(3) \\ V(3) \leq 225 + 0.95\, V(2) \\ V(3) \leq 250 + 0.95\, V(1) \\ V(3) \leq 275 + 0.95\, V(0) \end{cases}$$

(g) Voor iedere toestand $i \in S$ is ergens in respectievelijk a, b, in de optimale oplossing een gelijkheid te vinden waar de k de optimale beslissing bij hoort.

<u>Opg. 3</u>

(a)



waarin $\lambda = \frac{1}{2}$ en $\mu =$:

Opmerking: (1) toestand $(i,j) = (i)$ voor $i \geqslant 5$ (eigenlijk v

(2) de modelomschrijving is niet volledig: Bij een uit (2,2) kunnen twee toestanden ontstaan. Als kassa het eerste klaar is moet kassa 2 kennelijk geslo worden want kassa 1 heeft geen werk meer.

Dit betekent dat de klant in bediening bij kassa 2 naar kassa 1 overgaat; dit geeft een pijl met intensiteit μ van (2,2) naar (1,1). Is kassa 2 het eerste klaar dan moet deze open blijven omdat kassa 1 nog werk heeft, dus een overgang van (2,2) naar (1,2) met intensiteit μ

b) De evenwichtsvergelijkingen luiden

$$\lambda P_0 = \mu\,(P_{11} + P_{12})$$
$$(\lambda+\mu)P_{11} = \lambda P_0 + \mu\,(P_{21} + P_{22})$$
$$(\lambda+\mu)P_{12} = \mu P_{22}$$
$$(\lambda+\mu)_{21} = \lambda P_{11} + \mu P_{31}$$
$$(\lambda+2\mu)P_{22} = \lambda P_{12} + 2\mu P_{32}$$
$$(\lambda+\mu)P_{31} = \lambda P_{21}$$
$$(\lambda+2\mu)P_{32} = \lambda P_{22} + 2\mu P_{42}$$
$$(\lambda+2\mu)P_{42} = \lambda(P_{3,1} + P_{3,2}) + 2\mu P_{52}$$
$$(\lambda+2\mu)P_5 = \lambda P_{42} + 2\mu P_6$$
$$(\lambda+2\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + 2\mu P_{n+1} \quad , n \geq 6$$
$$P_0 + \sum_{i=1}^{3} P_{i1} + \sum_{i=1}^{4} P_{i,2} + \sum_{n=5}^{\infty} P_n = 1$$

De oplossing is veel rekenwerk en wordt achterwege gelaten.

) $0\,(P_{11}+P_{12}) + 1.\,(P_{21}+P_{32}) + 2\,(P_{31}+P_{42}) + \sum_{n=5}^{\infty}(n-2)P_n = EN_w$

) Toepassing formule v. Little : $\lambda EW = EN_w \implies EW = \frac{1}{\lambda} EN_w$

) $1.(P_0 + P_{11} + P_{21} + P_{31}) + 2.(P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42}) + 2\sum_{n=5}^{\infty} P_n$

) $\sum_{i=1}^{4} P_{i2} + \sum_{5}^{\infty} P_n$

) zie (f) (h) wegens de geheugenloosheid Poisson proces : $\frac{1}{\lambda} = 2$ [min]

22

Opgave 1

De Rotterdamse politie wordt door Interpol getipt dat zich aan boord van het Columbiaanse schip 'Café de Columbia' drugs bevindt. Eén dezer dagen wordt het schip in de Rotterdamse haven verwacht. De Rotterdamse korpschef die belast is met het uitvoeren van deze opdracht, moet beslissen hoe hij het schip zal laten doorzoeken. Hij heeft daartoe de beschikking over vier verschillende opsporingsmethoden: (1) ondervragen van de bemanning, (2) inspecteren van de laadruimte, (3) doorzoeken van de laadruimte, en (4) uitkammen van het hele schip. De kosten van deze opsporingsmethoden, alsmede de bijbehorende slagingspercentages, staan vermeld in de onderstaande tabel:

	1. Ondervragen	2. Inspecteren	3. Doorzoeken	4. Uitkammen
Kosten	fl. 250,-	fl. 1.000,-	fl. 2.500,-	fl. 10.000,-
Slagingspercentage	10 %	25 %	75 %	100 %

De Rotterdamse politie stelt zich als doel de in het schip aanwezige drugs tegen minimale kosten op te sporen, zelfs als uitkammen van het hele schip daarvoor noodzakelijk blijkt. De korpschef vraagt zich af welke opsporingsmethoden dienen te worden aangewend, als alle methoden slechts eenmaal, en in de hierboven gehanteerde volgorde, kunnen worden uitgevoerd.

De korpschef moet dus eerst bepalen of toepassing van opsporingsmethode 1 zinvol is. Vervolgens moet hij, afhankelijk van het resultaat van opsporingsmethode 1 (al dan niet uitgevoerd), bepalen of toepassing van opsporingsmethode 2 zinvol is, etcetera (zie onderstaande figuur). Uiteraard is het toepassen van een volgende opsporingsmethode alleen zinvol indien de drugs nog niet gevonden zijn. Als dat wel het geval is, ligt de toestand natuurlijk anders.

1. Ondervragen? → 2. Inspecteren? → 3. Doorzoeken? → 4. Uitkammen?

Bovenstaande kan worden geformuleerd als een dynamisch programmerings probleem.

(a) Wat kiest u als fasen, toestanden, beslissingen, en optimale waarde functie?

(b) Geef een recurrente betrekking voor de optimale waarde functie.

(c) Bepaal de optimale opsporingsstrategie en beschrijf in woorden wat deze strategie inhoudt. Hoeveel bedragen de verwachte opsporingskosten?

(d) Hoeveel zouden de verwachte opsporingskosten bedragen indien werd besloten de bemanning van de 'Cafe de Columbia' niet te ondervragen?

(d) $f_3(1) = 0$

$\Rightarrow f_2(0)$

Markov beslissingprobleem

TENT NOV 2002

(22)

Opgave 2

Een wasmiddelenfabrikant maakt regelmatig gebruik van marketing-acties, in de vorm van reclame op televisie. De fabrikant weet uit ervaring dat reclamespots de omzet op korte termijn sterk kunnen beïnvloeden. Om precies te zijn: de omzet in week $n+1$ is afhankelijk van de omzet in week n, en eventuele reclamespots in week $n+1$ (zie tabel).

		omzet week $n+1$					
		wel reclame			geen reclame		
opbrengsten	omzet week n	hoog	normaal	laag	hoog	normaal	laag
200.000	hoog	1	0	0	0,7	0,3	0
100.000	normaal	0,8	0,2	0	0,3	0,4	0,3
50.000	laag	0,6	0,3	0,1	0	0,3	0,7

Matrix met overgangskansen

De fabrikant wil onderzoeken wanneer marketing-acties lonend zijn, en wanneer niet. De kosten van reclamespots bedragen 100.000 gulden per week. De verwachte opbrengsten bij een hoge, normale en lage omzet bedragen respectievelijk 200.000, 100.000 en 50.000 gulden per week. Doelstelling is een maximale verwachte verdisconteerde winst over een oneindige tijdshorizon, bij een verdisconteringsfactor van 0,95 per week.

(a) Er is hier sprake van een Markov beslissingsprobleem. Wat definieert u als toestandsruimte en beslissingsruimte?

(b) Bepaal voor alle mogelijke toestanden i en beslissingen d de verwachte directe winst $r(i,d)$ over de komende week.

(c) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen.

De fabrikant zendt al jarenlang, week in week uit, reclamespots uit op televisie.

(d) Laat m.b.v. de policy-iteratie of waarde-iteratie methode zien dat de door de fabrikant gehanteerde strategie niet optimaal is.

(e) Geef een LP-formulering waarmee de optimale strategie kan worden bepaald.

policy

Wachttijd theorie

Opgave 3

In een practicumzaal bevinden zich 20 studenten en 1 practicumassistent, die Klaas heet. Terwijl Klaas rondloopt, borrelen er bij de studenten vragen op, die voldoende aanleiding geven om Klaas er even bij te roepen. De tijd tussen twee opeenvolgende vragen bezit een exponentiele verdeling met een verwachting van 5 minuten. De tijd die Klaas nodig heeft voor het beantwoorden van een vraag is exponentieel verdeeld met een verwachting van 4 minuten.

Als een student een vraag heeft en Klaas is nog niemand aan het helpen, dan schakelt deze altijd de hulp van Klaas in. Is Klaas al iemand aan het helpen, maar staat er nog niemand op hem te wachten, dan neemt slechts 75% van de studenten de moeite om op Klaas te wachten. Staat er ook nog iemand op Klaas te wachten, dan besluit geen enkele student Klaas er meer bij te roepen.

Mocht een (wachtende) student het wachten beu zijn, dan laat hij of zij dat duidelijk merken. De tijd die verstrijkt voordat een student het wachten beu is en zich daarnaar gaat gedragen, laat zich beschrijven door een exponentiele verdeling met een verwachting van 2 minuten. Klaas, die dit gedrag onmiddellijk opmerkt, blijkt als reactie hierop de student die hij op dát moment aan het helpen is twee keer zo snel af te handelen.

(a) Teken een plaatje van de toestandsruimte met de daarbij behorende overgangsintensiteiten.

(b) Stel de evenwichtsvergelijkingen op en bepaal hiermee de evenwichtskansen.

De volgende vragen mogen zowel exact als in termen van de evenwichtskansen uit (b) beantwoord worden.

(c) Hoeveel procent van de tijd is Klaas gemiddeld bezig met het beantwoorden van vragen?

⇒ 1 − Niet bezig

(d) Bepaal hoeveel studenten er gemiddeld op Klaas staan te wachten (in de evenwichtstoestand).

(e) Bepaal de throughput, d.w.z. het gemiddelde aantal vragen dat per minuut door Klaas wordt beantwoordt.

6/2 · 1126

(f) Bepaal m.b.v. de formule van Little hoeveel minuten een student gemiddeld op Klaas moet wachten.

(g) Hoeveel geïrriteerde studenten moet Klaas gemiddeld per practicum van drie uur te woord staan?

I II III IV

250,- 1000,- 2.500,- 10.000,-

22

1 De korpschef

(a) Het aantal fasen is hier gelijk aan het aantal beslissingen dat genomen moet worden. In dit geval zijn er dus 4 fasen, waarbij fase $n \in \{1, ..., 4\}$ overeenkomt met het moment waarop besloten moet worden of opsporingsmethode n al dan niet moet worden toegepast. De toestand i geeft aan of de in het schip aanwezige drugs wel ($i = 1$) of niet ($i = 0$) gevonden zijn. Afhankelijk van de toestand i in fase n, moet besloten worden of opsporingsmethode n wel of niet moet worden uitgevoerd. Met $f_n(i)$ definiëren we de verwachte kosten voor het opsporen van de drugs, gemeten vanaf opsporingsmethode n en startend in toestand i.

(b) Allereerst merken we op dat de kosten vanaf opsporingsmethode n nul bedragen, indien de drugs op dat moment reeds zijn opgespoord. Verder geldt dat de vierde opsporingsmethode altijd moet worden toegepast indien de drugs op dat moment nog niet zijn gelocaliseerd. Dit levert de volgende uitdrukkingen op:

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = 0 \text{ (niet uitvoeren)}$$

$$f_4(0) = 10.000 \text{ (wel uitvoeren)}$$

In alle andere gevallen geldt de volgende recurrente betrekking voor $f_n(0)$. Hierbij geven we met K_n de kosten en met p_n de slagingskans van opsporingsmethode n weer:

$$\boxed{f_n(0) = \min\{f_{n+1}(0), K_n + (1 - p_n) \cdot f_{n+1}(0) + p_n \cdot f_{n+1}(1)\}}$$

(c) De optimale strategie wordt vastgelegd door $f_1(0)$, omdat we moeten beginnen met de eerste opsporingsmethode ($n = 1$), en de drugs op dat moment nog niet gevonden zijn ($i = 0$). We rekenen nu terug vanaf fase 3 om tot de optimale strategie te komen:

$$f_3(0) = \min\{f_4(0), 2.500 + 0.25 \cdot f_4(0)\} = \min\{10.000, 5.000\} = 5.000 \text{ (wel uitvoeren)}$$

$$f_2(0) = \min\{f_3(0), 1.000 + 0.75 \cdot f_3(0)\} = \min\{5.000, 4.750\} = 4.750 \text{ (wel uitvoeren)}$$

$$f_1(0) = \min\{f_2(0), 250 + 0.90 \cdot f_2(0)\} = \min\{4.750, 4.525\} = 4.525 \text{ (wel uitvoeren)}$$

De optimale strategie is dus om alle opsporingsmethoden uit te voeren !!! De bijbehorende verwachte opsporingskosten bedragen $\boxed{\text{4.525 gulden.}}$

(d) In dat geval zouden de verwachte kosten gelijk zijn aan $f_2(0) = 4.750$ gulden.

---

2 De wasmiddelenfabrikant

TENT NOV 2002

(a) De toestandsruimte S wordt gevormd door de omzet in de afgelopen maand. De beslissingsruimte D hangt samen met de keuze om wel of geen reclame te maken.

$$S = \{\text{hoog, normaal, laag}\}$$

$$D = \{\text{wel reclame, geen reclame}\}$$

(b) De directe opbrengsten zijn opgebouwd uit de verkoopcijfers enerzijds, en de kosten van reclames anderzijds. M.b.t. de verkoopcijfers moet de gerealiseerde omzet vermenigvuldigd worden met de bijbehorende kans om op de verwachtingswaarde uit te komen:

toestand i	beslissing d	directe opbrengsten $r(i,d)$ in duizenden guldens
hoog	wel reclame	$-100 + 200 = 100$
hoog	geen reclame	$\frac{7}{10} \cdot 200 + \frac{3}{10} \cdot 100 = 170$
normaal	wel reclame	$-100 + \frac{8}{10} \cdot 200 + \frac{2}{10} \cdot 100 = 80$
normaal	geen reclame	$\frac{3}{10} \cdot 200 + \frac{4}{10} \cdot 100 + \frac{3}{10} \cdot 100 = 130$
laag	wel reclame	$-100 + \frac{6}{10} \cdot 200 + \frac{3}{10} \cdot 100 + \frac{1}{10} \cdot 50 = 55$
laag	geen reclame	$\frac{3}{10} \cdot 100 + \frac{7}{10} \cdot 50 = 65$

(c) Met V_H, V_N en V_L noteren we de verwachte verdisconteerde opbrengst startend vanuit de toestanden hoog, normaal resp. laag. Bij een verdisconteringsfactor van $\beta = 0.95$ per week dienen deze aan de volgende optimaliteitsvergelijkingen te voldoen:

$$V_H = \max \begin{cases} 100 + \frac{95}{100} \cdot V_H & \text{(wel reclame)} \\ 170 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{7}{10} \cdot V_H + \frac{3}{10} \cdot V_N\right) & \text{(geen reclame)} \end{cases}$$

$$V_N = \max \begin{cases} 80 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{8}{10} \cdot V_H + \frac{2}{10} \cdot V_N\right) & \text{(wel reclame)} \\ 130 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot V_H + \frac{4}{10} \cdot V_N + \frac{3}{10} \cdot V_L\right) & \text{(geen reclame)} \end{cases}$$

$$V_L = \max \begin{cases} 55 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{6}{10} \cdot V_H + \frac{3}{10} \cdot V_N + \frac{1}{10} \cdot V_L\right) & \text{(wel reclame)} \\ 65 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot V_N + \frac{7}{10} \cdot V_L\right) & \text{(geen reclame)} \end{cases}$$

(d) We beginnen met de politiek waarin er ongeacht de toestand reclame wordt gemaakt, en bepalen de bijbehorende waarden van V_H, V_N en V_L. We dienen hiertoe de volgende vergelijkingen op te lossen:

$$V_H = 100 + \frac{95}{100} \cdot V_H$$

$$V_N = 80 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{8}{10} \cdot V_H + \frac{2}{10} \cdot V_N\right)$$

$$V_L = 55 + \frac{95}{100} \cdot \left(\frac{6}{10} \cdot V_H + \frac{3}{10} \cdot V_N + \frac{1}{10} \cdot V_L\right)$$

(22)

Uit de eerste vergelijking volgt eenvoudig dat $V_H = 100 \cdot 20 = 2000$. Uit de tweede vergelijking leiden we vervolgens af dat $V_N \approx 1975$. Met behulp van de derde vergelijking volgt tenslotte $V_L \approx 1943$. We gaan nu kijken of we een betere politiek kunnen vinden.

$$V_H = \max \begin{cases} 100 + \frac{95}{100} \cdot 2000 & = 2000 \\ 170 + \frac{95}{100} \cdot (\frac{7}{10} \cdot 2000 + \frac{3}{10} \cdot 1975) & \approx 2063 \ (*) \end{cases}$$ NR / qR wn

$$V_N = \max \begin{cases} 80 + \frac{95}{100} \cdot (\frac{8}{10} \cdot 2000 + \frac{2}{10} \cdot 1975) & \approx 1975 \\ 130 + \frac{95}{100} \cdot (\frac{3}{10} \cdot 2000 + \frac{4}{10} \cdot 1975 + \frac{3}{10} \cdot 1943) & \approx 2004 \ (*) \end{cases}$$ nn / NR

$$V_L = \max \begin{cases} 55 + \frac{95}{100} \cdot (\frac{6}{10} \cdot 2000 + \frac{3}{10} \cdot 1975 + \frac{1}{10} \cdot 1943) & \approx 1943 \ (*) \\ 65 + \frac{95}{100} \cdot (\frac{3}{10} \cdot 1975 + \frac{7}{10} \cdot 1943) & \approx 1920 \end{cases}$$ wR

Een betere politiek is kennelijk om alleen reclame te maken indien de omzet in de voorafgaande week laag is geweest. De beginpolitiek is dus niet optimaal.

(c) Het betreft hier een maximaliseringsprobleem dus de lineaire ongelijkheden moeten een groter of gelijk teken bevatten. Om dezelfde reden dient de de doelfunctie te worden geminimaliseerd. Dit levert het volgende LP-probleem:

maximalisatie
⇒ ≥ & min doelfunctie
kijkend naar optimaliteitsvergelijking

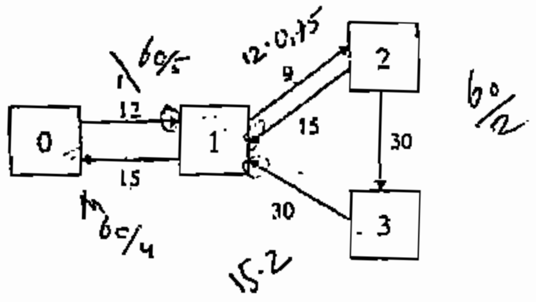
$$\min V_H + V_N + V_L$$

$$\begin{array}{llll} 1 & V_H & \geq & 100 + 0.95 \cdot V_H \\ 2 & V_H & \geq & 170 + 0.665 \cdot V_H + 0.285 \cdot V_N \\ 3 & V_N & \geq & 80 + 0.76 \cdot V_H + 0.19 \cdot V_N \\ 4 & V_N & \geq & 130 + 0.285 \cdot V_H + 0.38 \cdot V_N + 0.285 \cdot V_L \\ 5 & V_L & \geq & 55 + 0.57 \cdot V_H + 0.285 \cdot V_N + 0.095 \cdot V_L \\ 6 & V_L & \geq & 65 + 0.285 \cdot V_N + 0.665 \cdot V_L \end{array}$$

$$V_H, V_N, V_L \geq 0$$

3 De studentassistent

(a) We definieren als toestanden (k), waarbij $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ overeenkomt met het aantal studenten dat door Klaas behandeld wordt of nog behandeld moet worden, en een geïrriteerde student bovendien voor twee telt. Het toestandsovergangendiagram ziet er dan als volgt uit:



De overgangsintensiteiten tussen toestanden (0) en (1), alsmede die van toestand (2) naar (1), komen overeen met de 'normale' aankomst- en vertrekintensiteiten, en spreken derhalve voor zich. De overgangsintensiteit van toestand (1) naar (2) komt voort uit het feit dat gemiddeld slechts $12 \cdot 0.75 = 9$ studenten per uur naar Klaas toestappen indien hij al iemand aan het helpen is. De overgangsintensiteit van toestand (2) naar (3) geeft weer dat een student na 2 minuten wachten ongeduldig wordt; dit komt overeen met een intensiteit van 30 per uur. Vanaf dat moment gaat Klaas tweemaal zo hard werken, hetgeen weer blijkt uit de overgangsintensiteit van $15 \cdot 2 = 30$ per uur tussen toestand (3) en (1).

(b) Het stelsel evenwichtsvergelijkingen voor P_0 t/m P_3 volgt nu door de in- en uitgaande stroom voor iedere toestand aan elkaar gelijk te stellen. Dit levert het volgende op:

$$\begin{aligned} 12 \cdot P_0 &= 15 \cdot P_1 \\ 24 \cdot P_1 &= 12 \cdot P_0 + 15 \cdot P_2 + 30 \cdot P_3 \\ 45 \cdot P_2 &= 9 \cdot P_1 \\ 30 \cdot P_3 &= 30 \cdot P_2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt eenvoudig $P_1 = \frac{4}{5} \cdot P_0$, $P_2 = \frac{1}{5} \cdot P_1$ en $P_3 = P_2$, waaruit de volgende evenwichtskansen volgen: $P_0 \approx 0.472$, $P_1 \approx 0.377$, $P_2 \approx 0.075$ en tenslotte $P_3 \approx 0.075$.

(c) Hier wordt niets anders gevraagd dan de bezettingsgraad van Klaas, en deze is gelijk aan $1 - P_0 \approx 0.528$. Klaas is dus gedurende ongeveer 53% van de tijd aan het werk.

(d) In toestand (2) en (3) staat er één student op Klaas te wachten, gemiddeld zijn dat er dus $1 \cdot (P_2 + P_3) \approx 0.15$. $0{,}075 + 0{,}075 = 0{,}15$

(e) In toestand (1) en (2) worden er gemiddeld 15 vragen per uur beantwoord, in toestand (3) gemiddeld 30 per uur. De totale verwerkingscapaciteit bedraagt dus $15 \cdot (P_1 + P_2) + 30 \cdot P_3 \approx 9.03$ studenten per uur. Een andere manier is om te kijken naar de werkelijke aankomstintensiteit. Deze bedraagt $12 \cdot P_0 + 9 \cdot P_1 \approx 9.06$ studenten per uur (het verschil wordt veroorzaakt door afrondfouten).

(f) Het gemiddelde aantal wachtende studenten is gelijk aan $E\{N_w\} = 0.15$, de werkelijke aankomstintensiteit is gelijk aan ongeveer $\lambda = 9$ studenten per uur. Met behulp van de formule van Little volgt nu dat een student gemiddeld $\frac{1}{60}$ uur = 1 minuut op Klaas moet wachten: λ = gemidd.

zie blz. 126

$$\boxed{E\{W\} = \frac{1}{\lambda} \cdot E\{N_w\}} = \frac{0.15}{9} = \frac{1}{60}$$

(g) De enige toestand waarin studenten geïrriteerd kunnen raken is toestand (2). Eenmaal in die situatie belandt is de aankomstintensiteit van geïrriteerde studenten gelijk aan 30 per uur. Gemiddeld moet Klaas dus $30 \cdot P_2 \approx 2.25$ geïrriteerde studenten per uur te woord staan. Vanuit toestand (3) geredeneerd kom je op hetzelfde antwoord uit.

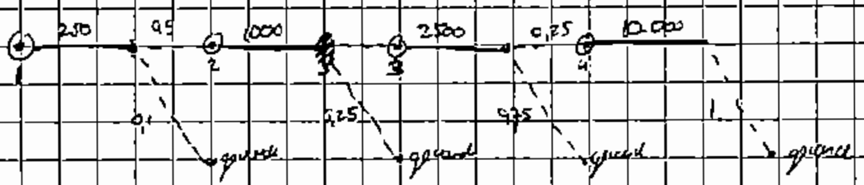
$P_1 = \frac{4}{5} \cdot P_0$

P

6-11-1997 Tentamen.

Opgave I

a)



- fase n = methode 1, 2, 3, 4 $n = 1,2,3,4$
- toestand i = gevonden [1] of niet [0]
- beslissing = inzetten methode n
- Optimale waardefunctie $f_n(i)$ = minimaliseren van de kosten voor het vinden v.d. drugs vanaf fase n gegeven toestand i.

b) $f_n(1) = 0 \quad n = 1,2,3,4$

$f_4(0) = 10.000$

$$f_n(0) = \min \begin{cases} f_{n+1}(0) & [1] \\ K_{n+1} - p_n f_{n+1}(0) + p_n f_{n+1}(1) & [0] \end{cases}$$

c) $f_4(i)$ = Niet ! teruggrekenen vanaf fase 3 $f_4(0) = 10.000$

$$f_3(0) = \begin{cases} 10.000 & [\cancel{X}] \\ 2500 + 0{,}25 \cdot 10.000 + 0{,}75 \cdot 0 = 5000 & [\cancel{X}] \\ \cancel{0{,}25 \cdot 10.000 + 0{,}75 \cdot 0 = 2500} & [\cancel{X}] \end{cases} \rightarrow \text{wel uitvoeren}$$

$$f_2(0) = \begin{cases} 5000 & [\cancel{X}] \\ 1000 + 0{,}75 \cdot 2500 \quad \cancel{2875}\ 4750 & [\cancel{X}] \\ \cancel{0{,}75 \cdot 2500 + 0{,}25 \cdot \ldots = 2125} & [\cancel{X}] \end{cases} \rightarrow \text{wel uitvoeren}$$

$$f_1(0) = \begin{cases} \cancel{2000}\ 4750 & [\cancel{X}] \\ \cancel{2500}\ 250 + 0{,}9 \cdot 4750 = \cancel{4150}\ 4525 & \\ \cancel{0{,}9 \cdot 1000 + 0{,}1 \cdot 0 = 900} & [\cancel{X}] \end{cases} \rightarrow \text{wel uitvoeren.}$$

Optimaal: → alle opsporingsmethoden uitvoeren! kosten 4525.

d) $f_2(0) = 4750.$ of $f_1(0)$ niet uitvoeren $f_1(0) = \begin{Bmatrix} 4750 \\ x \end{Bmatrix}$.

Opgave 2

$\underset{n}{0} \xrightarrow{1/4} \underset{n+1}{0}$ + reclamespots.

kosten reclamespot 100.000 p/w
verw. opbrengsten H o 200.000 p/w
N o 100.000 "
L o 50.000 "

Max verw. verdisc. winst oneindige horizon. $\beta = 0{,}95$.

a) • toestandsruimte i = omzet in week n met $i = H, N, L$.

• Beslissingsruimte d = wel reclame [1] of geen reclame [0]

Verwachte opbrengst $R(i,d)$

$R(H,I) = -100 + 1\cdot 200 = 100$ $R(H,0) = 0{,}7\cdot 200 + 0{,}3\cdot 100 = 170$
$R(N,I) = -100 + 0{,}8\cdot 200 + 0{,}2\cdot 100 = 80$ $R(N,0) = 0{,}3\cdot 200 + 0{,}4\cdot 100 + 0{,}3\cdot 50 = 115$
$R(L,I) = -100 + 0{,}6\cdot 200 + 0{,}3\cdot 100 + 0{,}1\cdot 50 = 55.$ $R(L,0) = 0{,}3\cdot 100 + 0{,}7\cdot 50 = 65$

c) Optimaliteitsvergelijking

$$V(H) = \max \begin{cases} 100 + 0{,}95(1\cdot V(H)) & [1] \\ 170 + 0{,}95(0{,}7V(H) + 0{,}3V(N)) & [0] \end{cases}$$

$$V(N) = \max \begin{cases} 80 + 0{,}95(0{,}8V(H) + 0{,}2V(N)) & [1] \\ 115 + 0{,}95(0{,}3V(H) + 0{,}4V(N) + 0{,}3V(L)) & [0] \end{cases}$$

$$V(L) = \max \begin{cases} 55 + 0{,}95(0{,}6V(H) + 0{,}3V(N) + 0{,}1V(L)) & [1] \\ 65 + 0{,}95(0\cdot V(H) + 0{,}3V(N) + 0{,}7V(L)) & [0] \end{cases}$$

Overgangskans

$p(H\mid H,I) = 1$	$p(H\mid H,0) = 0{,}7$
$p(N\mid H,I) = 0$	$p(N\mid H,0) = 0{,}3$
$p(L\mid H,I) = 0$	$p(L\mid H,0) = 0$
$p(H\mid N,I) = 0{,}8$	$p(H\mid N,0) = 0{,}3$
$p(N\mid N,I) = 0{,}2$	$p(N\mid N,0) = 0{,}4$
$p(L\mid N,I) = 0$	$p(L\mid N,0) = 0{,}3$
$p(H\mid L,I) = 0{,}6$	$p(H\mid L,0) = 0$
$p(N\mid L,I) = 0{,}3$	$p(N\mid L,0) = 0{,}3$
$p(L\mid L,I) = 0{,}1$	$p(L\mid L,0) = 0{,}7$

d) $\left.\begin{array}{l} S(H) = [1] \\ S(N) = [1] \\ S(L) = [1] \end{array}\right\}$ Huidige strategie

• policy iteration.

$V(H) = 100 + 0{,}95\,V(H) \implies V(H) = 2000$
$V(N) = 80 + 0{,}95(0{,}8V(H) + 0{,}2V(N)) \implies V(N) = 80 + 0{,}95(1600 + 0{,}2V(N)) \to 0{,}81V(N) = 1600$ $V(N) = 1975{,}308$
$V(L) = 55 + 0{,}95(0{,}6V(H) + 0{,}3V(N) + 0{,}1V(L)) \implies 0{,}905V(L) = 55 + 1140 + 562{,}96$
$V(L) = 1942{,}49$

dan invullen. $V_2(H) = \begin{cases} 2000 \\ 2063^* \end{cases}$ $V_2(N) = \begin{cases} 1975 \\ 2004^* \end{cases}$ $V_2(L) = \begin{cases} 1943^* \\ 1920 \end{cases}$ Beter $\to$ $S(H) = [0]$
$S(N) = [0]$
$S(L) = [1]$

d) • Value-iteration

$$V_{n+1}(i) = \max_{d\in i}\left\{ r(i,d) + \alpha \sum_{j\in D} p(j|i,d)\, V_n(j) \right\} = V_n(i) - \max_{d\in i}\left\{ r(i,d) + \alpha \sum p(j|i,d)\, V_{n+1}(j) \right\}$$

$$V_1(H) = \begin{cases} 100 & [1] \\ 170 & [0]^* \end{cases}$$

$$V_1(N) = \begin{cases} 80 & [1] \\ 115 & [0]^* \end{cases}$$

$$V_1(L) = \begin{cases} 55 & [1] \\ 65 & [0]^* \end{cases}$$

$$V_2(H) = \begin{cases} 100 + 0{,}95 \cdot \cancel{100}^{170} & = \cancel{195}\ 261{,}5 \quad [1] \\ 170 + 0{,}95 \cdot (0{,}7 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 115) & = 315 \quad [0]^* \end{cases}$$

$$V_2(N) = \begin{cases} 80 + 0{,}95 \cdot (0{,}8 \cdot \cancel{100}^{170} + 0{,}2 \cdot \cancel{80}^{115}) & = \cancel{171{,}2}\ 231{,}05^* \\ 115 + 0{,}95 \cdot (0{,}3 \cdot 170 + 0{,}4 \cdot 115 + 0{,}3 \cdot 65) & = \cancel{110{,}675}\ 225{,}675 \end{cases}$$

$$V_2(L) = \begin{cases} 55 + 0{,}95\,(0{,}6 \cdot \cancel{100}^{170} + 0{,}3 \cdot \cancel{80}^{115} + 0{,}1 \cdot \cancel{55}^{65}) & = \cancel{140{,}025}\ 190{,}85^* \\ 65 + 0{,}95\,(0 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 115 + 0{,}7 \cdot 65) & = \cancel{141}^*\ 141 \end{cases}$$

$\delta(H) = [0]$ $\xrightarrow{\text{Niet optimaal}}$ was $\delta(H) = [1]$

$\delta(N) = [1]$ $\qquad$ $\delta(N) = [1]$

$\delta(L) = [0]$ $\quad$ etc $\quad$ $\delta(L) = [1]$

e) $V_n(i) = \max_{d\in D}\left\{ r(i,d) + \alpha \sum_{j\in D} p(j|i,d)\, V_n(j) \right\}$

z.d.d. min $V(H) + V(N) + V(L) = 1$

$V_H \geq 100 + 0{,}95\, V_H$
$V_H \geq 170 + 0{,}665\, V_H + 0{,}285\, V_N$
$V_N \geq 80 + 0{,}76\, V_H + 0{,}19\, V_N$
$V_N \geq 130 + 0{,}285\, V_H + 0{,}38\, V_N + 0{,}285\, V_L$
$V_L \geq 55 + 0{,}57\, V_H + 0{,}285\, V_N + 0{,}095\, V_L$
$V_L \geq 65 + 0{,}285\, V_N + 0{,}665\, V_L$

$V_H, V_N, V_L \geq 0$

22

Opgave 2 SDP oefening.

(A) fase : $n \to$ week $n = 1,2,3,4$.

toestanden $\to$ omd. hoogte $i \Rightarrow S\{$Hoog, Normaal, laag$\}$

besliss. $d \Rightarrow D\{$Reclame, Geen Reclame$\}$

Opt waarde functie $\to$ MAX verwachte winst vanaf fase n vanuit toestand i.

Directe opbrengst

(B)
$R[H,R] = -100 + 200 = 100$
$R[H,GR] = 0{,}7 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 100 = 170$
$R[N,R] = -100 + 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}2 \cdot 100 = 80$
$R[N,GR] = 0{,}3 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 50 = 115$.
$R[L,R] = 0{,}6 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 50 = 155 - 100 = 55$
$R[L,GR] = 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}7 \cdot 50 = \cancel{95}\ 65$

Rec betr. $V_n(i) = \max_{d \in D_i} \left[R(i,d) + \alpha \sum_{j \in S} p(j|i,d)\, V_{n-1}(j) \right]$

$V_0(i) = 0 \quad \forall i$

$V_1(H) = \max \begin{cases} 100 & [R] \\ 170 & [GR]^* \end{cases} \quad V_0[H] = 170$

$V_1[N] = \max \begin{cases} 80 & [R] \\ 115 & [GR]^* \end{cases} \quad V_0[N] = 115$

$V_1[L] = \max \begin{cases} 55 & [R] \\ 65 & [GR]^* \end{cases} \quad V_0[L] =$

(C) $V_n[H] = \max \begin{cases} 200 + 0{,}95\, V_{n-1}(H) \\ 170 + 0{,}95(0{,}7\, V_{n-1}(H) + 0{,}3\, V_{n-1}(N)) \end{cases}$

$V_n[N] = \max \begin{cases} 80 + 0{,}95\,(0{,}8\, V_{n-1}(H) + 0{,}2\, V_{n-1}(N)) \\ 115 + 0{,}95\,(0{,}3\, V_{n-1}(H) + 0{,}4\, V_{n-1}(N) + 0{,}3\, V_{n-1}(L)) \end{cases}$

$V_n(L) = \max \begin{cases} 55 + 0{,}95\,(0{,}6\, V_{n-1}(H) + 0{,}3\, V_{n-1}(N) + 0{,}1\, V_{n-1}(L)) \\ 65 + 0{,}95\,(0{,}3\, V_{n-1}(N) + 0{,}7\, V_{n-1}(L)) \end{cases}$

(D) Strategie van de fabrikant.
$S[H] = [R] \to V[H] = 100 + 0{,}95\, V[H]$
$S[N] = [R] \to V[N] = 80 + 0{,}95\,(0{,}8\, V[H] + 0{,}2\, V[N])$
$S[L] = [R] \to V[L] = 55 + 0{,}95\,(0{,}6\, V[H] + 0{,}3\, V[N] + 0{,}1\, V[L]$

Policy iteration:

① Waardebepaling

(A) $V[H] = 100 + 0{,}95\, V[H]$
$0{,}05\, V[H] = 100$
$V[H] = 2000$

(N) $V[N] = 80 + 0{,}95\,(0{,}8 \cdot 2000) + 0{,}2\, V[N])$
$V[N] = 80 + 0{,}95\,(1600 + 0{,}2\, V[N])$
$V[N] = 1600 + 0{,}19\, V[N]$
$0{,}81\, V[N] = \frac{160000}{81}$

(C) $V[L] = 55 + 0{,}95\,(0{,}6 \cdot 2000 + 0{,}3 \cdot \frac{160000}{81} + 0{,}1\, V(L))$
$V[L] = 55 + 0{,}95\,(1200 + \frac{16000}{27} + 0{,}1\, V(L))$
$V[L] = 1195 + \frac{15200}{27} + 0{,}095\, V(L)$
$0{,}905\, V[L] = \frac{47465}{27}$
$V[L] = \frac{9493000}{4887}$

② Verbeterstap

$$V[H] = MAX \begin{cases} 100 + 0{,}95 \cdot 2000 & = 2000 \\ (170 + 0{,}95 \cdot (0{,}7 \cdot 2000 + 0{,}3 \cdot \frac{160000}{81}) & \approx 2063^* \; [GR] \end{cases}$$

$$V[N] = MAX \begin{cases} 80 + 0{,}95\,(0{,}8 \cdot 2000 + 0{,}2 \cdot \frac{160000}{81}) & = 1975 \\ 115 + 0{,}95\,(0{,}3 \cdot 2000 + 0{,}4 \cdot \frac{160000}{81} + 0{,}3\, \frac{9493000}{4887}) & = 1989^* \; [GR] \end{cases}$$

$$V[L] = MAX \begin{cases} 55 + 0{,}95\,(0{,}6 \cdot 2000 + 0{,}3 \cdot \frac{160000}{81} + 0{,}1\, \frac{9493000}{4887}) & = 1943^* \; [R] \\ 65 + 0{,}95\,(0{,}3 \cdot \frac{160000}{81} + 0{,}7\, \frac{9493000}{4887}) & = 1919{,}7 \end{cases}$$

$S_2[H] = [GR] \neq S_1[H] = [R]$
$S_2[N] = [GR] \neq S_1[N] = [R]$
$S_2[L] = [R] \not\neq S_1[L] = [R]$

} dus waarschijnlijk praktisch niet geldig

Waarde Iteratie -

$V_0(i) = 0 \quad \forall i$

$V_1(H) = \max \begin{cases} 100 \\ 170 \end{cases} [GR]^*$

$V_1(N) = \max \begin{cases} 80 \\ 115 \end{cases} [GR]$

$V_1(L) = \max \begin{cases} 55 \\ 65 \end{cases} [GR]$

verschilt met RRR

$V_2(H) = \max \begin{cases} 100 + 0{,}95 \cdot 170 & = 261{,}5 \\ 170 + 0{,}95 \cdot (0{,}7 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 115) & = 287{,}3^* \; [GR] \end{cases}$

$V_2(N) = \max \begin{cases} 80 + 0{,}95 \cdot (0{,}8 \cdot 170 + 0{,}2 \cdot 115) & = \text{etc} \\ 115 + 0{,}95\,(0{,}3 \cdot 170 + 0{,}4 \cdot 115 + 0{,}3\, 65) & = \end{cases}$

$V_2(L) = \max \begin{cases} 55 + 0{,}95 \cdot (0{,}6 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 115 + 0{,}1\, 65) & = \\ 65 + 0{,}95 \cdot (0{,}3 \cdot 115 + 0{,}7 \cdot 65) & = \end{cases}$

etc.

ook nu al verschil met RRR

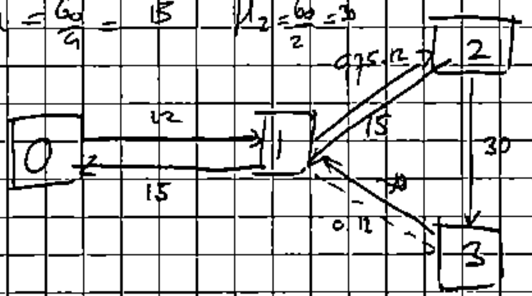
22

Opgave 3

a) toestand i waarbij $i \in \{0,1,2,3\}$ overeenkomt met aantal ~~klanten~~ studenten dat door klaas behandeld moet worden, en een ~~geen student met vraag behandeld~~ geïrriteerde student voor twee telt.

$\lambda_1 = \frac{60}{5} = 12 \quad \lambda_2 = \frac{60}{2} = 30$

$\mu = \frac{60}{4} = 15 \quad \mu_2 = \frac{60}{2} = 30$



b)
$12 \cdot P_0 = 15 P_1$
$24 P_1 = 12 P_0 + 15 P_2 + 30 P_3$
$45 P_2 = 9 P_1$
$30 P_3 = 30 P_2$

$P_1 = \frac{4}{5} P_0$

$P_2 = \frac{1}{5} P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{4}{25} P_0$

$P_3 = P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{4}{25} P_0$

$P_0 + \frac{4}{25} P_0 + \frac{4}{5} P_0 + \frac{4}{25} P_0 = 1$

$P_0 = 0{,}4716$
$P_1 = 0{,}377$
$P_2 = 0{,}075$
$P_3 = 0{,}075$

c) $1 - P_0 = \rho \approx 0{,}5283$

d) $E(L_q) = 1 \cdot P_2 + 1 \cdot P_3 = \cancel{0{,}225}\ 0{,}15$

e) $E(L_s) = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}527$

toestand 1) en 2) geen 15 vragen p/u
3) geen 30.
dus $15(P_1 + P_2) + 30 P_3 = 9{,}03$ studenten.

f) $L = \lambda W$

$E(W_q) = \frac{E(L_q)}{\lambda} = \frac{0{,}15}{\lambda} = \frac{1}{60}$

$\omega = \mu = 9{,}03$

g) ~~$P_3 = 0{,}075$.~~

$30 \cdot P_2 = 2{,}25$ geïrriteerde student. (of idem. $30 \cdot P_3$)

Faculteit der Toegepaste Wiskunde III
Kenmerk: TW97/T-OR/18/dh
Datum: 8 augustus 1997

Remco

S. HAMMINGA
EMMASTRAAT 167
7513 BC
ENSCHEDE

(23)

Universiteit Twente

Tentamen Operationele Research II

Woensdag 13 augustus 1997, 9.00 – 12.00 uur
code 158006

1. Beschouw het volgende produktieplanningsprobleem over N perioden. Een installatie kan twee soorten produkten produceren. De vraag naar produkt 1 in de periode j is X_j en Y_j voor produkt 2. In een periode kan echter slechts één type produkt worden geproduceerd, waarbij de vraag naar het andere produkt verloren gaat (er kan niet vooruit gewerkt worden; er is dus geen voorraadvorming). De omsteltijd van de installatie bij produktwisseling is 1 periode en kost A. De netto opbrengst per stuk bedraagt p_i voor type i. Doel is de winst te maximaliseren over N perioden.

   a. Geef een D.P.-formulering. Verklaar de toestanden en beslissingen. [U mag ervan uitgaan dat de installatie in de nulde periode kosteloos wordt ingesteld op één van de twee produkttypen.]

   b. Los het probleem op m.b.v. D.P. met de volgende gegevens

	j	1	2	3	4	
1	X_j	5	1	3	8	$N=4$
2	Y_j	10	3	6	15	$p_1=2, p_2=1$
						$A=1$

2. Iedere zaterdagavond speelt een man poker, zeer tot ongenoegen van zijn vrouw. Als hij haar voorafgaand aan het pokeren uit eten neemt (kosten fl.56,–) zal zij met kans $\frac{7}{8}$ volgende week zaterdag in een goed humeur zijn en met kans $\frac{1}{8}$ in een slecht humeur, ongeacht het humeur dat ze deze zaterdag heeft; neemt hij haar vooraf echter niet uit eten, dan zijn deze kansen, respectievelijk, $\frac{1}{8}$ en $\frac{7}{8}$. Is zij in een slecht humeur en gaat hij niet met haar uit eten, dan gaat ze naar een boetiek en koopt voor fl.200,– nieuwe kleren.

   a. Geef de optimaliteitsvergelijking(en) in het geval de man de verwachte verdisconteerde kosten over een oneindige horizon wil minimaliseren (disconteringsfactor α). Geef de definitie van de optimale waardefunctie, de beslisruimte en de toestandsruimte.

   b. Bepaal de optimale politiek en de optimale waardefunctie m.b.v. politiek-iteratie voor $\alpha = \frac{4}{5}$.

   c. Geef een L.P.-model voor dit probleem en los dit grafisch op. Controleer hiermee het antwoord in b.

Z.O.Z.

3. Een wachtsysteem met Poisson aankomsten (intensiteit λ) en één loket kan maximaal 3 klanten bevatten. De bediening per klant bestaat uit twee typen direct opeenvolgende handelingen. De duren van deze twee handelingen zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met respectievelijk parameter μ_1 en μ_2. Pas nadat de tweede handeling is voltooid kan een volgende klant in bediening worden genomen. Klanten die het systeem vol aantreffen gaan weg en komen niet meer terug.

   a. Om dit systeem op de gebruikelijke manier te analyseren moet de toestandsbeschrijving (= aantal klanten in systeem) worden uitgebreid met de fase waarin de bediening zich bevindt.
   Definieer de toestanden en geef het bijbehorende overgangsintensiteitendiagram.

   b. Geef de evenwichtsvergelijkingen en los deze op.

   c. Bereken uit *b.* de stationaire kansverdeling van het aantal klanten in het systeem.

   d. Hoeveel klanten worden gemiddeld per tijdseenheid bediend en hoeveel komen er gemiddeld per tijdseenheid het systeem binnen.

   e. Bereken m.b.v. *c.* en *d.* de gemiddelde wachttijd.

   De volgende twee extra vragen zijn alleen bestemd voor TW-studenten.

   f. Geef voor het geval dat de wachtruimte onbeperkt is de stationariteitsvoorwaarde van het systeem.

   g. Bereken in dit geval de gemiddelde wachttijd m.b.v. de formule van Polleczek-Khintchine

$$EW = \frac{\rho}{2(1-\rho)\mu}\{1 + (\mu\sigma)^2\}.$$

Tentamen 13 - 8 - 97. (23)

M°

Opg 1.

(a) Toestanden: $\{1, 2\}$ = verz. toestanden waarop de mac staat ingesteld aan begin periode

Beslissingen $\{p, o\}$ = {produceren, omstellen}.

$$g_t(1) = \max \begin{cases} p_1 X_t + g_{t+1}(1) & \text{niet omstellen} \\ g_{t+1}(2) - A & \text{omstellen} \end{cases}$$

$$g_t(2) = \max \begin{cases} p_2 Y_t + g_{t+1}(2) \\ g_{t+1}(1) - A \end{cases}$$

$t = 1, 2, \ldots, N$ met $g_{N+1}(\cdot) \equiv 0$.

$$g_0 = \max \begin{cases} g_1(1) & \text{stel in op type 1} \\ g_1(2) & \text{stel in op type 2} \end{cases}$$

(b) $g_4(1) = \max\{2 \times 8, -1\} = 16$ [p]

$g_4(2) = \max\{15 \times 1, -1\} = 15$ [p]

$g_3(1) = \max\{3 \times 2 + g_4(1), g_4(2) - 1\} = \max\{22, 14\} = 22$

$g_3(2) = \max\{6 \times 1 + g_4(2), g_4(1) - 1\} = \max\{21, 15\} = 21$ [p]

$g_2(1) = \max\{2 \times 1 + g_3(1), g_3(2) - 1\} = \max\{24, 20\} = 24$ [p]

$g_2(2) = \max\{3 \times 1 + g_3(2), g_3(1) - 1\} = \max\{24, 21\} = 24$ [p]

[vervolg 1]

$$g_1(1) = \max\{5\times 2 + g_2(1),\ g_2(2) - 1\} = \max\{34, 23\} = 34 \quad [p]$$

$$g_1(2) = \max\{10 + g_2(2),\ g_2(1) - 1\} = \max\{34, 23\} = 34. \quad [p]$$

$$g_0 = \max\left\{\begin{matrix} g_1(1) \\ g_1(2) \end{matrix}\right\} = 34$$

De machine mag ingesteld worden op beide product typen. Er wordt in de optimale politiek nooit omgesteld.

Opgave 2

(a) Toestandsruimte $\{g, s\}$

Actieruimte $\{0, 1\}$ 0 = niet uit eten   1 = wel uit e

$\left.\begin{matrix} V_g \\ V_s \end{matrix}\right\}$ optimale waardefunctie: verwachte verdisconteerde kosten indien de begintoestand (in periode 1) g (s) is.

$$V_g = \min \begin{cases} 56 + \alpha \left\{ \frac{7}{8} V_g + \frac{1}{8} V_s \right\} \\ \alpha \left\{ \frac{1}{8} V_g + \frac{7}{8} V_s \right\} \end{cases}$$

$$V_s = \min \begin{cases} 56 + \alpha \left\{ \frac{7}{8} V_g + \frac{1}{8} V_s \right\} \\ 200 + \alpha \left\{ \frac{1}{8} V_g + \frac{7}{8} V_s \right\} \end{cases}$$

(b) $\delta_1(g) = 0 \qquad \delta_1(s) = 1 \qquad \pi_1 = (\delta_1, \delta_1, \ldots)$ [startpolitiek]

$$\left.\begin{aligned} V_g^1 &= \frac{8}{10} \left\{ \frac{1}{8} V_g^1 + \frac{7}{8} V_s^1 \right\} \\ V_s^1 &= 56 + \frac{8}{10} \left\{ \frac{7}{8} V_g^1 + \frac{1}{8} V_s^1 \right\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_g^1 &= \frac{245}{2} \\ V_s^1 &= \frac{315}{2} \end{aligned}$$

[waardebepaling]

verbeteringsstap:

toestand g:

$$\min \begin{cases} 56 + \frac{8}{10} \left\{ \frac{7}{8} \cdot \frac{245}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{315}{2} \right\} = \frac{315}{2} \\ \frac{8}{10} \cdot \left\{ \frac{1}{8} \cdot \frac{245}{2} + \frac{7}{8} \cdot \frac{315}{2} \right\} = \frac{245}{2} \leftarrow ! \end{cases}$$

$\delta_2(g) = 0$

toestand s :

$$\min \begin{cases} 56 + \frac{8}{10}\left\{ \frac{7}{8} * \frac{245}{2} + \frac{1}{8} * \frac{315}{2} \right\} = \frac{315}{2} \leftarrow \\ 200 + \frac{8}{10}\left\{ \frac{1}{8} * \frac{245}{2} + \frac{7}{8} * \frac{315}{2} \right\} = \frac{645}{2} \end{cases}$$

$$\delta_2(s) = 1$$

<u>stopcriterium</u> :

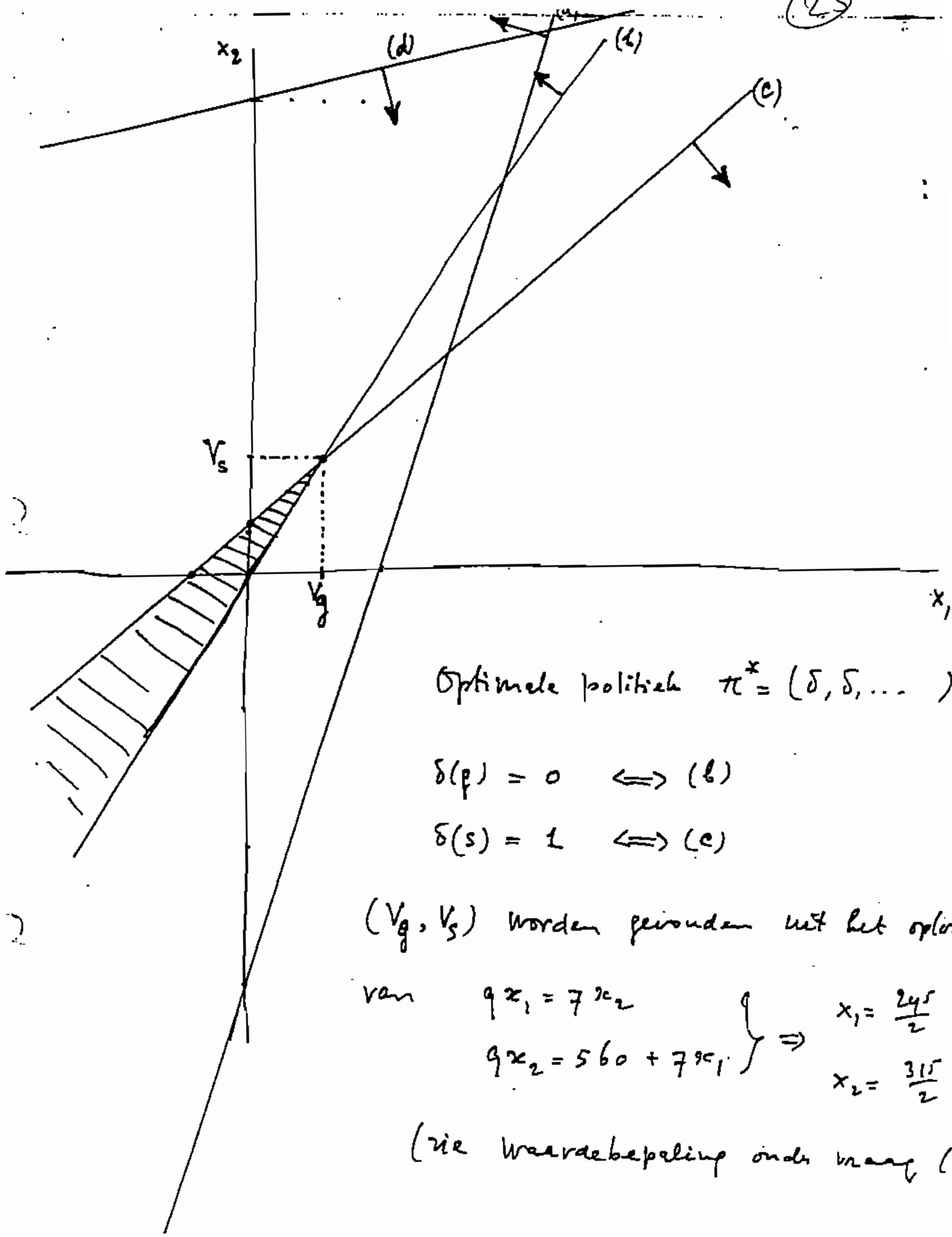
$$\delta_1(g) = \delta_2(g) \text{ en } \delta_2(s) = \delta_1(s) \Rightarrow \pi_1 \text{ optimaal!}$$

en $V_g = \frac{245}{2}$ en $V_s = \frac{315}{2}$

Het LP-model luidt

$$\max \; x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{l|ll}
x_1 \leq 56 + \frac{7}{10} x_1 + \frac{1}{10} x_2 & 3x_1 \leq 560 + x_2 & (a) \\
x_1 \leq \frac{1}{10} x_1 + \frac{7}{10} x_2 & 9x_1 \leq 7x_2 & (b) \\
x_2 \leq 56 + \frac{7}{10} x_1 + \frac{1}{10} x_2 & 9x_2 \leq 560 + 7x_1 & (c) \\
x_2 \leq 200 + \frac{1}{10} x_1 + \frac{7}{10} x_2 & 3x_2 \leq 2000 + x_1 & (d)
\end{array}$$



Optimale politiek $\pi^* = (\delta, \delta, \ldots)$

$\delta(g) = 0 \iff (b)$

$\delta(s) = 1 \iff (c)$

(V_g, V_s) worden gevonden uit het oplos

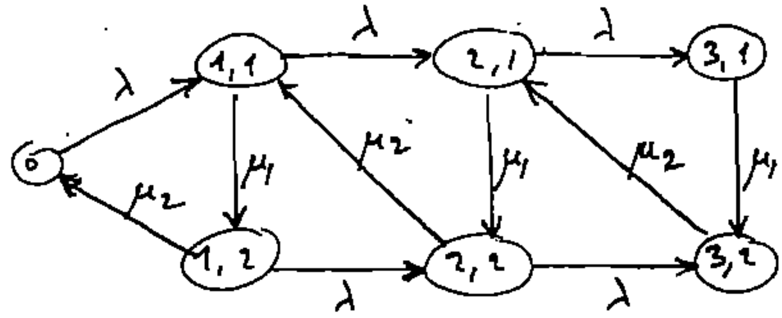
van
$$\left.\begin{aligned} 9x_1 &= 7x_2 \\ 9x_2 &= 560 + 7x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{245}{2} \\ x_2 &= \tfrac{315}{2} \end{aligned}$$

(zie waardebepaling onder vraag (

vg 3 :

toestand $(i,j) = (\#\text{ in systeem}, \text{fase})$:

(a)



(b) $\lambda P_0 = \mu_2 P_{12}$ (1)

$(\lambda+\mu_2)P_{12} = \mu_1 P_{11}$ (2) $\quad (\lambda+\mu_1)P_{11} = \lambda P_0 + \mu_2 P_{22}$ (5)

$(\lambda+\mu_2)P_{22} = \lambda P_{12} + \mu_1 P_{21}$ (3) $\quad (\lambda+\mu_1)P_{21} = \lambda P_{11} + \mu_2 P_{32}$ (6)

$\mu_2 P_{32} = \lambda P_{22} + \mu_1 P_{31}$ (4) & $\quad \mu_1 P_{31} = \lambda P_{21}$ (7)

$$P_{12} \overset{(1)}{=} \frac{\lambda}{\mu_2} P_0$$

$$P_{11} \overset{(2)}{=} \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{\lambda}{\mu_2} P_0 = \frac{\lambda}{\mu_1}\left(1+\frac{\lambda}{\mu_2}\right)P_0$$

$$P_{22} \overset{(5)}{=} \left(\frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1+\frac{\lambda}{\mu_2}\right)P_0 - \frac{\lambda}{\mu_2}P_0$$

$$= \left\{\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1+\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\mu_2}\right) - \frac{\lambda}{\mu_2}\right\}P_0$$

$$= \frac{\lambda}{\mu_2}\left[\left(1+\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\mu_2}\right) - 1\right]P_0$$

Remco II

(24)

Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Kenmerk: TW97/T-OR/08/dh
Datum: 17 maart 1997

S. HAMMINGA
EMMASTRAAT 167
7513 BC
ENSCHEDE

Universiteit Twente

Tentamen Operationele Research II

~~Vrijdag 21 maart 1997, 9.00 – 12.00 uur~~

code 158006

Recurrente betrekkingen

1. Winnie doet mee in een TV-spelprogramma, waarin zij als winnaar uit de bus komt. Zij krijgt vervolgens de gelegenheid maximaal vier bonus-vragen te beantwoorden, die in de gegeven volgorde (zie Tabel) worden gesteld. De kans op een correct antwoord en de bonus die gewonnen wordt bij een correct antwoord staan in onderstaande tabel.

   Zeer zeker doen!

vraag	kans goed antw.	bonus
1	0.6	fl.100
2	0.5	200
3	0.4	300
4	0.3	400
		1000

   In totaal kan Winnie dus fl.1000,– winnen.
   Winnie kan op ieder gewenst moment stoppen en het reeds gewonnen geld meenemen. Wordt een vraag onjuist beantwoord dan stopt de bonusronde en is Winnie al haar reeds gewonnen geld kwijt. Het is Winnie toegestaan "te passen" nadat de vraag is gesteld: in dit geval wordt de daarop volgende vraag gesteld. Het is toegestaan meerdere keren te passen.

   Bepaal m.b.v. dynamische programmering een strategie die Winnie's verwachte totale bonus maximaliseert.
   (Aanwijzing: Gebruik als fase het rangnummer van de vraag *die gesteld gaat worden.*) Geef aan wat als toestand optreedt en wat de beslissingen zijn. Hoe groot is de maximale verwachte totale bonus. ?

2. Een machine kan zich in drie toestanden bevinden: "goed", "matig" en "slecht". Bevindt de machine zich aan het begin van de week in de toestand "goed" (resp. "matig") dan wordt die week een opbrengst verkregen van fl.100,– (resp. fl.50,–). Is de toestand "slecht" dan krijgt de machine een grote beurt, tegen kosten fl.200,–, en is de machine een week uit roulatie, waarna hij zich aan het begin van de volgende week in de toestand "goed" bevindt. In de toestand "goed" kan gedurende de week klein onderhoud worden gepleegd, tegen kosten fl.50,–. In dit geval blijft de opbrengst in de betreffende week ongewijzigd, maar is de toestand aan het begin van de volgende week met zekerheid: "goed". Is de toestand aan het begin van een week "matig" dan kan de machine een week uit roulatie genomen worden en tegen kosten fl.100,– aan het begin van de volgende week in toestand "goed" worden gebracht.
   Worden geen onderhoudswerkzaamheden verricht dan verloopt de toestand volgens de overgangskansen in onderstaande tabel.

MARKOV

Z.O.Z.

24

		toestand volgende week		
		goed	matig	slecht
toestand	goed	0.8	0.2	–
huidige week	matig	–	0.5	0.5

Het optimaliteitscriterium is de contante waarde van de netto verwachte opbrengsten, met verdisconteringsconstante $\alpha = \frac{1}{2}$.

a. Geef de optimaliteitsvergelijkingen.

b. Geef twee iteraties van het waarde-iteratie algoritme.

c. Kies een onderhoudsstrategie en onderzoek m.b.v. het policy-iteratie algoritme of deze politiek optimaal is.

d. Geef een L.P. model waarmee de optimale politiek bepaald kan worden. Vindt deze politiek door het L.P. model grafisch op te lossen.

---

3. Beschouw een wachtsysteem met 1 loket en 2 wachtplaatsen. Het aankomstproces bij het systeem is Poisson, met intensiteit λ. Indien een arriverende klant i klanten in het systeem aantreft is de kans dat hij het systeem binnen gaat r_i ($i = 0, 1, 2, 3$); uiteraard geldt $r_0 = 1$ en $r_3 = 0$. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld (geheugenloos) met gemiddelde μ^{-1}. Echter, indien er twee wachtende klanten zijn, werkt de server een factor p ($p \geq 1$) sneller en is de gemiddelde bedieningssnelheid $p\mu$.

Kan fout gaan!

a. Geef het intensiteitendiagram behorende bij het proces dat het aantal klanten in het systeem beschrijft.

b. Geef de balans- (evenwichts-) vergelijkingen voor de stationaire kansverdeling P_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

c. Bepaal deze stationaire kansverdeling.

De volgende vragen mogen beantwoord worden als uitdrukkingen in de P_i's.

d. Hoeveel klanten worden per tijdseenheid bediend.

e. Hoe groot is de gemiddelde wachttijd van een klant.

f. Hoe groot is de gemiddelde lengte van de bezetperiode van de server.

Tentamen 21 / 3 / '97

(24)

(1) Definieer:

$f_t(i)$ = max. verwachte bonus, indien de reeds gewonnen (totale) bonus i bedraagt en vraag t als volgende wordt gesteld

fase	mogelijke toestanden
1	0
2	0, 100
3	0, 100, 200, 300
4	0, 100, 200, 300, 400, 500, 600

Beslissingen : passen, vraag beantwoorden of stoppen.

Merk op: stoppen na vraag k, komt overeen met passen op de vragen $k+1, k+2, \ldots, n$ $(=4)$; dus hoeft deze beslissing niet meegenomen te worden !

Algemene recursie :

$$f_t(i) = \max \begin{cases} f_{t+1}(i) & [\text{pas}] \\ p_t\, f_{t+1}(i+b_t) & [\text{antw.}] \end{cases},$$

waarin p_t = kans goed antwoord vraag t

b_t = bonus bij goed antwoord op vraag t.

(24)

$$f_4(i) = \max \begin{cases} i & [\text{pas}] \\ \frac{3}{10}(i+400) + \frac{7}{10} \cdot 0 & [\text{antw}] \end{cases}$$

Dus

$$f_4(i) = i \quad \text{voor} \quad i \geq \frac{3}{10} i + 120 \overset{(a)}{\iff} i \geq 200$$
$$= \frac{3}{10} i + 120 \quad \text{voor} \quad i = 0, 100$$

$$f_3(0) = \max \begin{cases} f_4(0) = \overset{\frac{3}{10}\cdot 400}{120} & [\text{pas}] \\ \frac{4}{10} f_4(300) = \overset{\frac{4}{10}\cdot 300}{\underline{120}} & [\text{antw}] \end{cases}$$

$$f_3(100) = \max \begin{cases} f_4(100) = \overset{\frac{3}{10}\cdot(100+400) = 150}{150} & [\text{pas}] \\ \frac{4}{10} f_4(400) = \overset{\frac{4}{10}\cdot 400}{\underline{\underline{160}}} & [\text{antw}] \end{cases}$$

$$f_3(200) = \max \begin{cases} f_4(200) = \underline{200} & [\text{pas}] \\ \frac{4}{10} f_4(500) = \overset{\frac{4}{10}\cdot 500}{\underline{\underline{200}}} & [\text{antw}] \end{cases} \quad \text{beide optim}$$

$$f_3(300) = \max \begin{cases} f_4(300) = \underline{\underline{300}} & [\underline{\text{pas}}] \\ \frac{4}{10} f_4(600) = \overset{\frac{4}{10}\cdot 600}{240} & [\text{antw}] \end{cases}$$

$$f_2(0) = \max \begin{cases} f_3(0) = \underline{120} & [\text{pas}] \\ \frac{1}{2} f_3(200) = 100 & [\text{antw}] \end{cases}$$

$$f_2(100) = \max \begin{cases} f_3(100) = \underline{\underline{160}} & [\text{pas}] \\ \frac{1}{2} f_3(300) = 150 & [\text{antw}] \end{cases}$$

$$f_1(0) = \max \begin{cases} f_2(0) = \underline{120} & [\underline{\text{pas}}] \\ \frac{6}{10} f_2(100) = 96 & [\text{antw}] \end{cases}$$

Max. verwachte totale bonus = 120. Opt. strategie: vraag 1: p
vraag 2: pas ; vraag 3: antw. of passen; als [illegible] vraag 4 [illegible] ...

2

(a) $$f(\text{goed}) = \max \begin{cases} 50 + \frac{1}{2} f(\text{goed}) & [\text{ond}] \\ 100 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{8}{10} f(\text{goed}) + \frac{2}{10} f(\text{matig}) \right\} & [\text{geen ond.}] \end{cases}$$

$$f(\text{matig}) = \max \begin{cases} -100^{(*)} + \frac{1}{2} f(\text{goed}) & [\text{ond}] \\ 50 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{2} f(\text{matig}) + \frac{1}{2} f(\text{slecht}) \right. & [\text{geen ond.}] \end{cases}$$

$$f(\text{slecht}) = -200 + \frac{1}{2} f(\text{goed})$$

(*) Er is wat voor te zeggen (-100) te vervangen door -150 in de zin van de som van de onderhoudskoste en het productieverlies.

b) $f_1(g) = f_1(m) = f_1(s) = 0$

$f_2(g) = 100$, $f_2(m) = 50$, $f_2(s) = -200$

$$f_3(g) = \max \begin{cases} 50 + \frac{1}{2} * 100 = 100 \\ 100 + \frac{4}{10} * 100 + \frac{1}{10} * 50 = 145 \end{cases} = 145$$

$$f_3(m) = \max \begin{cases} -100 + \frac{1}{2} * 100 = -50 \\ 50 + \frac{1}{4} * 50 + \frac{1}{4}(-200) = 12.5 \end{cases} = 12.5$$

$$f_3(s) = -200 + \frac{1}{2} * 100 = -150$$

Kies b.v. stationaire politiek $\pi = (\delta, \delta, \dots)$, met $\delta(g)$ = geen ond. $\delta(m)$ = ond. en $\delta(s)$ = ond.

Waardebepaling:

24

$$V_{\pi_1}(g) = 100 + \frac{4}{10} V_{\pi_1}(g) + \frac{1}{10} V_{\pi_1}(m)$$

$$V_{\pi_1}(m) = -100 + \frac{1}{2} V_{\pi_1}(g)$$

$$V_{\pi_1}(s) = -200 + \frac{1}{2} V_{\pi_1}(g)$$

fout.

Oplossing: $V_{\pi_1}(g) = \frac{1600}{11}$, $V_{\pi_1}(m) = -\frac{300}{11}$, $V_{\pi_1}(s) = -\frac{1400}{11}$

Verbeteringsstap:

Beschouw toestand 'matig':

$$\max \begin{cases} -100 + \frac{1}{2} \cdot V_{\pi_1}(g) = -\frac{300}{11} & [\text{ond}] \\ 50 + \frac{1}{4} V_{\pi_1}(m) + \frac{1}{4} V_{\pi_1}(s) = \frac{125}{11} & [\text{geen ond.}] \leftarrow ! \end{cases}$$

dus $\delta_2(m)$ = geen ond. en $\delta_1(m) \neq \delta_2(m)$, dus politiek $\underline{n}$ optimaal !

(d) $\min \; x_1 + x_2 + x_3$

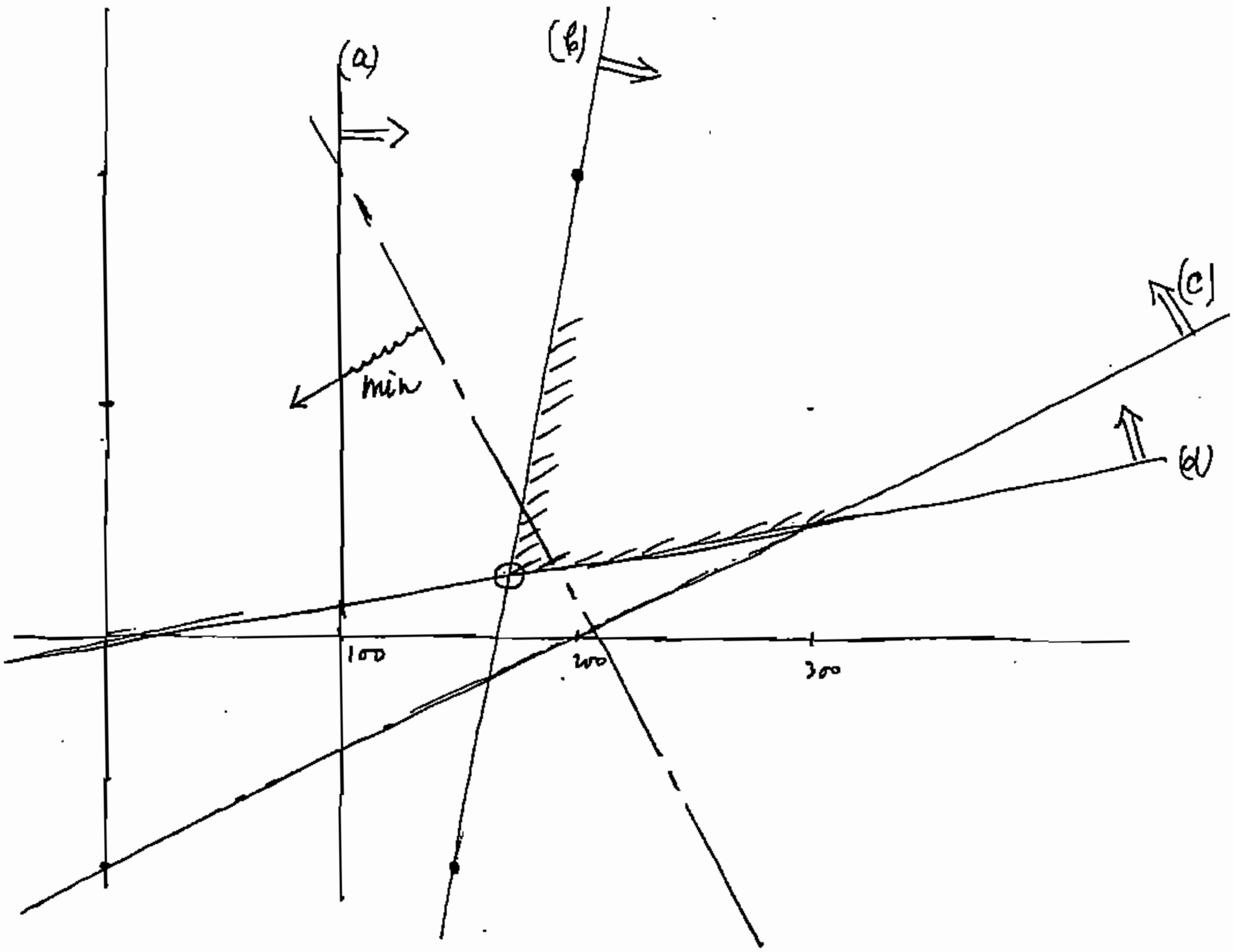
$$x_1 \geqslant 50 + \frac{1}{2} x_1$$
$$x_1 \geqslant 100 + \frac{4}{10} x_1 + \frac{1}{10} x_2$$
$$x_2 \geqslant -100 + \frac{1}{2} x_1$$
$$x_2 \geqslant 50 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3$$
$$x_3 = -200 + \frac{1}{2} x_1$$

Om dit probleem geometrisch op te lossen elimineren we x_3 uit het L.P. probleem; Dit geeft het volgende L.P. model:

(2u)

$\min \ \frac{3}{2}x_1 + x_2 - 200$

$x_1 \geq 50 + \frac{1}{2}x_1$	[ond]	(a)	$x_1 \geq 100$
$x_1 \geq 100 + \frac{4}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2$	[geen]	(b)	$6x_1 \geq 1000 + x_2$
$x_2 \geq -100 + \frac{1}{2}x_1$	[ond]	(c)	$x_2 \geq -100 + \frac{1}{2}x_1$
$x_2 \geq \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2$	[geen]	(d)	$6x_2 \geq x_1$



Optimale strategie : (b) en (d) actieve constraints $\Rightarrow$

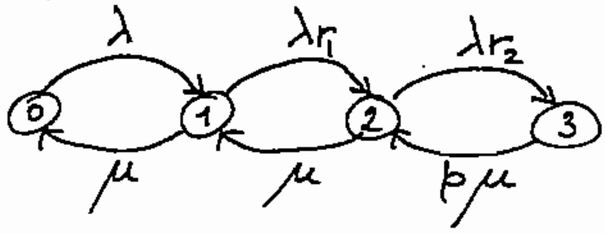
$\pi = (\delta, \delta, \ldots)$ met $\delta(g) = \delta(m) =$ geen ond. $\delta(s) =$ ond.

Optimale waardefunctie : (snijpunt (b) en (d))

$$V(g) = \frac{1200}{7} \ ; \ V(m) = \frac{200}{7} \ ; \ V(s) = -\frac{800}{7}$$

(3)

(a)



(b) $\lambda P_0 = \mu P_1$ (1)

$(\lambda r_1 + \mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ (2)

$(\lambda r_2 + \mu) P_2 = \lambda r_1 P_1 + p\mu P_3$ (3)

$p\mu P_3 = \lambda r_2 P_2$ (4)

(c) Optellen (1) en (2) geeft $\lambda r_1 P_1 = \mu P_2$ (5)

Dus

(1) $\Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$

(5) $\Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu} r_1 P_1 \Rightarrow P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 r_1 P_0$

(4) $\Rightarrow P_3 = \frac{\lambda}{p\mu} r_2 P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 r_1 r_2 P_0$

Uit $\sum_{i=0}^{3} P_i = 1$ volgt $P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 r_1 + \frac{1}{p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 r_1 r_2\right]^{-1}$

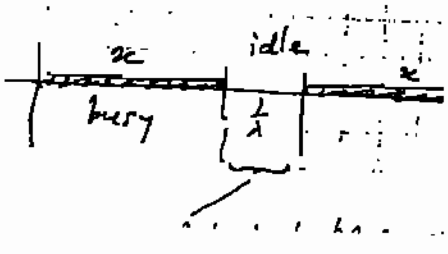
(d) $\mu(P_1 + P_2) + p\mu P_3$ of $\lambda P_0 + \lambda r_1 P_1 + \lambda r_2 P_2 = \tilde{\lambda}$

(e) $\tilde{\lambda} \overline{W} = \overline{N}_w$ (Little)

$\overline{N}_w = \sum_{n=2}^{3} (n-1) P_n = P_2 + 2P_3$

Antw: $\overline{W} = \frac{P_2 + 2P_3}{\mu(P_1 + P_2 + pP_3)}$

(f) $\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + x} = P_0 \Rightarrow x = \frac{1 - P_0}{P_0} \cdot \frac{1}{\lambda}$

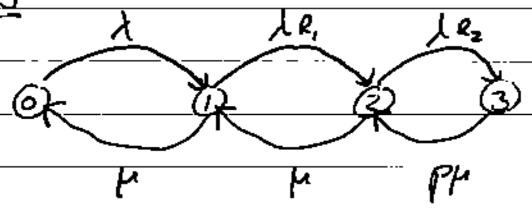


(kan theorie zie M/G/1-model)

(29)

Opgave 3

a)



b. Evenwichtsvergelijking voor P_0, P_1, P_2, P_3

$\lambda P_0 = \mu P_1$ ①

$(\lambda e_1 + \mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ②

$(\lambda e_2 + \mu) P_2 = \lambda e_1 P_1 + \rho\mu P_3$ ③

$(\rho\mu) P_3 = \lambda e_2 P_2$ ④

c) Uit ① en ② $\Rightarrow (\lambda e_1 + \mu) P_1 = \mu P_1 + \mu P_2$

$\lambda e_1 + \mu P_1 = \mu P_1 + \mu P_2$

$\lambda e_1 P_1 = \mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu} e_1 P_1$

$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow \underline{P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0}$

$\Big\} \; \underline{P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 e_1 P_0}$

Uit ④ volgt $\Rightarrow \rho\mu P_3 = \lambda e_2 P_2$

$P_3 = \frac{\lambda}{\rho\mu} e_2 P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 e_1 e_2 P_0$

Omdat $\sum_{i=0}^{3} P_i = 1$ moet $P_0 = \dfrac{1}{\left(\underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{\frac{\lambda}{\mu} P_0}_{P_1} + \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 e_1 P_0}_{P_2} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 e_1 e_2 P_0}_{P_3}\right)}$

d) # klanten per tijdseenheid $= \mu(P_1 + P_2) + \rho\mu P_3$

e.) $\bar{\lambda}\bar{W} = \bar{N}_w$ (Little)

$\bar{N}_w = \sum_{n=2}^{3} (n-1) P_n = P_2 + 2P_3$

Antw $\bar{W} = \dfrac{P_2 + 2P_3}{\mu(e_1 P_2 + \rho P_3)}$

f) $E(\rho) = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$? Antw $\dfrac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + x} = P_0 \Rightarrow x = \dfrac{1-P_0}{P_0} \cdot \dfrac{1}{\lambda}$

~~27-11-1996~~ (25)

Dynamisch Programmeren | recurrente betrekking

Opgave 1

Je doet mee aan een spelletje op televisie, en belandt in de finale met een bedrag van 3750 gulden. In deze finale kun je d.m.v. een gokspelletje je bedrag nog enigszins ophogen. Dit spelletje bestaat uit maximaal drie beurten. Bij iedere beurt mag je besluiten te stoppen, om daarmee het bedrag in kas te incasseren. Zoniet, dan moet je met een speciale dobbelsteen gooien om te bepalen met hoeveel je bedrag zal worden opgehoogd. Je loopt daarbij echter het risico op BLUT te belanden, waardoor je al je geld kwijtraakt (maar nog wel mag doorspelen). Je vraagt je af wat te doen teneinde je verwachte eindbedrag te maximaliseren. De dobbelsteen ziet er (schematisch) als volgt uit:

uitkomst	*f* 250,=	*f* 500,=	*f* 1000,=	BLUT
kans	0.4	0.3	0.2	0.1

Je kunt dit probleem oplossen m.b.v. een stochastische DP-formulering. Definieer hiertoe $f_n(x)$ als je maximale verwachte eindbedrag indien je x gulden in kas hebt na de n^e beurt.

(a) Benoem de fasen, toestanden en beslissingen in bovenstaande formulering. Geef bovendien de toestandsruimte in elke fase.

(b) Beargumenteer dat $f_3(x) = x$ voor alle x.

(c) Laat nu zien dat $f_2(x) = x$ voor $x \geq 4500$ en $f_2(x) = 0.9 \cdot x + 450$ voor $x \leq 4500$.

(d) Geef de recurrente betrekkingen voor $f_0(x)$ en $f_1(x)$.

(e) Bepaal m.b.v. achterwaartse recursie je optimale strategie, en geef deze in woorden weer. Hoeveel bedraagt je verwachte eindbedrag?

GOED voorbeeld!

$\boxed{\text{markov}}$ ketens

Opgave 2 8

Een wasmiddelenfabrikant maakt regelmatig gebruik van marketing-acties, in de vorm van reclame op televisie. De fabrikant weet uit ervaring dat reclamespots de omzet op korte termijn sterk kunnen beïnvloeden. Om precies te zijn: de omzet in week $n+1$ is afhankelijk van de omzet in week n, en eventuele reclamespots in week $n+1$ (zie tabel).

	omzet week $n+1$					
	wel reclame			geen reclame		
omzet week n	hoog	normaal	laag	hoog	normaal	laag
hoog	1	0	0	0,7	0,3	0
normaal	0,8	0,2	0	0,3	0,4	0,3
laag	0,6	0,3	0,1	0	0,3	0,7

Matrix met overgangskansen

De fabrikant wil onderzoeken wanneer marketing-acties lonend zijn, en wanneer niet. De kosten van reclamespots bedragen 100.000 gulden per week. De verwachte opbrengsten bij een hoge, normale en lage omzet bedragen respectievelijk 200.000, 100.000 en 50.000 gulden per week. Doelstelling is een maximale verwachte verdisconteerde winst over een oneindige tijdshorizon, bij een verdisconteringsfactor van 0,95 per week.

(a) Er is hier sprake van een Markov beslissingsprobleem. Wat definieert u als toestandsruimte en beslissingsruimte?

(b) Bepaal voor alle mogelijke toestanden i en beslissingen d de verwachte directe winst $r(i,d)$ over de komende week.

(c) Formuleer de optimaliteitsvergelijkingen.

De fabrikant zendt al jarenlang, week in week uit, reclamespots uit op televisie.

(d) Laat m.b.v. de policy-iteratie of waarde-iteratie methode zien dat de door de fabrikant gehanteerde strategie niet optimaal is.

(e) Geef een LP-formulering waarmee de optimale strategie kan worden bepaald.

wachtrij theorie

goeie!! vat wel mee! 25

Opgave 3

Een volcontinu productiebedrijf maakt bij haar produktieproces gebruik van twee machines, een nieuw type en een oud type, die beide aan storingen onderhevig zijn. In geval van een storing aan een machine, wordt deze onmiddellijk in reparatie genomen. Helaas kan de reparatie-afdeling maar één machine tegelijk repareren. Omdat het nieuwe type een twee maal zo hoge produktiecapaciteit heeft als het oude type, wordt altijd de voorkeur gegeven aan de reparatie van het nieuwe type, zelfs als al aan de reparatie van het oude type is begonnen.

	verwachte tijd tot storing	verwachte reparatietijd
nieuwe type	25 dagen	2 dagen
oude type	10 dagen	5 dagen

De bedrijfsleiding is geïnteresseerd in de performance van dit productiesysteem. Uit historische gegevens is gebleken dat zowel de levensduur als de reparatietijd van beide types zich laat beschrijven door een exponentiële verdeling. De verwachte levensduren en reparatietijden staan vermeld in bovenstaande tabel.

(a) Benoem de vier toestanden (0,0), (0,1), (1,0) en (1,1) waarin dit systeem zich kan bevinden.

(b) Geef in een plaatje de toestandsovergangen met bijbehorende overgangsintensiteiten weer.

(c) Stel de evenwichtsvergelijkingen op en bepaal hiermee de evenwichtskansen.

De volgende vragen mogen zowel exact als in termen van de evenwichtskansen uit (c) worden beantwoord.

(d) Hoeveel machines zijn er gemiddeld voor productie beschikbaar?

(e) Hoeveel procent van de productie wordt door het nieuwe type gerealiseerd?

(f) Hoeveel procent van de tijd is het productiesysteem 'down', d.w.z. kan er niet geproduceerd worden?

(g) Hoeveel bedraagt de gemiddelde lengte van een zogenaamde 'down period', d.w.z. een aaneengeschakelde periode waarin er niet geproduceerd kan worden?

(h) Bepaal nu m.b.v. de antwoorden op vraag (f) en (g) de gemiddelde lengte van een zogenaamde 'up period', d.w.z. een aaneengeschakelde periode waarin er wel geproduceerd kan worden.

(25)

Datum 29 nov 1996

(1) (a) fasen = rangnummer beurt = {0,1,2,3}
toestand = hoeveelheid in kas
beslissingen = {stoppen of doorspelen}

mv

fasen	toestandsruimte
0	3750
1	0, 4000, 4250, 4750
2	0, 250, 500, 1000, 4250, 4500, 4750, 5000, 5275, 575[illegible]
3	0, 250, 500, 1000, 750, 1250, 1500, 2000, 4500, 4750, 5250, 5500, 6000, 5000, 5750, 6250, 6750

(b) $f_3(x) = x$ voor alle x, want na de derde beurt is het spel afgelopen en dus is x het eindbedrag

(c) $$f_2(x) = \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} f_3(x+250) + \frac{3}{10} f_3(x+500) + \frac{2}{10} f_3(x+1000) & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} x. & [\text{stop}] \\ \frac{9}{10}x + 450 & [\text{doorgaan}] \end{cases}$$

Er geldt $x \geqslant \frac{9}{10}x + 450 \Rightarrow x \geqslant 4500$ dan stoppen

en $x < \frac{9}{10}x + 450 \Leftrightarrow x < 4500$ dan doorgaan,

dus

$$f_2(x) = x \qquad x \geqq 4500$$
$$= \frac{9}{10}x + 450, \quad x \leqslant 4250 \quad (\text{zie (a)})$$

(d) $$f_k(x) = \max \begin{cases} x & [\text{stop}] \\ & \end{cases} \qquad (k=0,1)$$

(e) $f_1(0) = \max \begin{cases} 0 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} f_2(250) + \frac{3}{10} f_2(500) + \frac{2}{10} f_2(1000) & [\text{doorgaan}] \end{cases}$

$= \max \begin{cases} 0 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10}(9*25+450) + \frac{3}{10}(9*50+450) + \frac{2}{10}(9*100+450) = & \end{cases}$

$f_1(4000) = \max \begin{cases} 4000 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} \underset{[illegible]}{f_2(4250)} + \underset{[illegible]}{f_2(4500)} + \underset{1000}{f_2(5000)} & [\text{doorgaan}] \end{cases}$

$= \max \begin{cases} 4000 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10}\left[\frac{9}{10}(4250)+450\right] + \frac{3}{10} * 4500 + \frac{2}{10} * 5000 = \underline{\underline{4060}} & \end{cases}$

$f_1(4250) = \max \begin{cases} 4250 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} * 4500 + \frac{3}{10} * 4750 + \frac{2}{10} * 5250 = 4275 & [\text{do} \end{cases}$

$f_1(4750) = \max \begin{cases} \underline{\underline{4750}} & [\underline{\text{stop}}] \\ \frac{4}{10} * 5000 + \frac{3}{10} * 5250 + \frac{2}{10} * 5750 = 4725 & [\text{doorga} \end{cases}$

$\boxed{f_0(3750) = \max \begin{cases} 3750 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} f_1(4000) + \frac{3}{10} f_1(4250) + \frac{2}{10} f_1(4750) & [\text{doorg} \end{cases}}$

$= \max \begin{cases} 3750 & [\text{stop}] \\ \frac{4}{10} * 4060 + \frac{3}{10} * 4275 + \frac{2}{10} * 4750 = \underline{\underline{3856.5}} & [\underline{\text{do}} \end{cases}$

29/11/96

(25)

(a) Toestandsruimte = { omzet afgelopen week }, dus

$S = \{ \text{hoog}, \text{normaal}, \text{laag} \}$

Beslisruimte = { wel, niet } reclame

$A = \{ \text{recl}, \text{geen} \}$

(b) $(r(i,d))$

		recl.	geen
i	hoog	100	200
	norm.	0	100
	laag	−50	50

(c) $$f(\text{hoog}) = \max \begin{cases} 100 + 0.95\, f(\text{hoog}) & [\text{recl}] \\ 200 + 0.95 \left(\frac{7}{10} f(\text{hoog}) + \frac{3}{10} f(\text{norm}) \right) & [\text{geen}] \end{cases}$$

$$f(\text{norm.}) = \max \begin{cases} 0 + 0.95 \left\{ \frac{8}{10} f(\text{hoog}) + \frac{2}{10} f(\text{norm}) \right\} & [\text{recl}] \\ 100 + 0.95 \left\{ \frac{3}{10} f(\text{hoog}) + \frac{4}{10} f(\text{norm}) + \frac{3}{10} f(\text{laag}) \right\} & [\text{geen} \end{cases}$$

$$f(\text{laag}) = \max \begin{cases} -50 + 0.95 \left\{ \frac{6}{10} f(\text{hoog}) + \frac{3}{10} f(\text{norm}) + \frac{1}{10} f(\text{laag}) \right\} & [\text{recl} \\ 50 + 0.95 \left\{ \frac{3}{10} f(\text{norm}) + \frac{7}{10} f(\text{laag}) \right\} & [\text{geen} \end{cases}$$

(d) Strategie $\pi_1 = (\delta, \delta, \ldots)$, $\delta(\text{hoog}) = \text{recl}$, $\delta(\text{norm}) = \text{recl}$, $\delta(\text{laag}) =$

Waardebepaling: oplossen van het stelsel

$$V_{\pi_1}(\text{hoog}) = 100 + 0.95\, V_{\pi_1}(\text{hoog})$$
$$V_{\pi_1}(\text{norm}) = 0.95 \left\{ \frac{8}{10} V_{\pi_1}(\text{hoog}) + \frac{2}{10} V_{\pi_1}(\text{norm}) \right\}$$
$$V_{\pi_1}(\text{laag}) = -50 + 0.95 \left\{ \frac{6}{10} V_{\pi_1}(\text{hoog}) + \frac{3}{10} V_{\pi_1}(\text{norm}) + \frac{1}{10} V_{\pi_1}(\text{laag}) \right\}$$

oplossing : $V_{\pi_1}(\text{hoog}) = 2000$

$V_{\pi_1}(\text{norm.}) = 1876.5$

$V_{\pi_1}(\text{laag}) = 1795$

Verbeteringsstap:

Beschouw toestand 'hoog'.

$$\max \begin{cases} 100 + 0.95\, V_{\pi_1}(\text{hoog}) = 2000 & [\text{reel.}] \\ 200 + 0.95 \left\{ \frac{7}{10} \times 2000 + \frac{3}{10} \times 1876.5 \right\} \approx \underline{\underline{2065}} & [\text{geen}] \end{cases}$$

$\delta_2(\text{hoog}) \neq \delta_1(\text{hoog}) \Rightarrow$ dus politiek <u>niet optimaal</u>!

2) $\min \quad x_1 + x_2 + x_3$

$$x_1 \geq 100 + 0.95\, x_1$$
$$x_1 \geq 200 + 0.95 \left\{ \frac{7}{10} x_1 + \frac{3}{10} x_2 \right\}$$
$$x_2 \geq 0.95 \left\{ \frac{8}{10} x_1 + \frac{2}{10} x_2 \right\}$$
$$x_2 \geq 100 + 0.95 \left\{ \frac{3}{10} x_1 + \frac{4}{10} x_2 + \frac{3}{10} x_3 \right\}$$
$$x_3 \geq -50 + 0.95 \left\{ \frac{6}{10} x_1 + \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{10} x_3 \right\}$$
$$x_3 \geq 50 + 0.95 \left\{ \frac{3}{10} x_2 + \frac{7}{10} x_3 \right\}$$

29/11/96

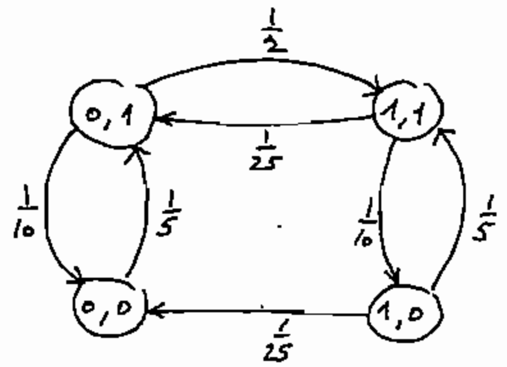
(3) (a) (0,0) beide machines kapot

(1,0) alleen oude machine kapot

(0,1) alleen nieuwe machine kapot

(1,1) beide machines werkend

(b)



(c)
$$\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{2}\right)p(0,1)=\tfrac{1}{5}\,p(0,0)+\tfrac{1}{25}\,p(1,1)$$
$$\left(\tfrac{1}{5}\right)p(0,0)=\tfrac{1}{10}\,p(0,1)+\tfrac{1}{25}\,p(1,0)$$
$$\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{25}\right)p(1,0)=\tfrac{1}{10}\,p(1,1)$$
$$\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{25}\right)p(1,1)=\tfrac{1}{2}\,p(0,1)+\tfrac{1}{5}\,p(1,0)$$

A

$$p(0,0)+p(1,0)+p(0,1)+p(1,1)=1$$

B

evenwichtsvergelijkingen

Oplossing : $p(0,0)=\frac{14}{167}$, $p(1,0)=\frac{125}{501}$, $p(0,1)=\frac{34}{501}$, $p(1,1)=\frac{100}{167}$

(d) $2\,P(1,1)+1\cdot\{P(1,0)+P(0,1)\}$

(e) $$\frac{2\{P(1,1)+P(1,0)\}}{2\{P(1,1)+P(1,0)\}+1\cdot\{P(1,1)+P(0,1)\}}\times 100\,\%$$

(f) $P(0,0)$

(g) In de toestand (0,0) wordt <u>alleen</u> gerepareerd aan het nieuwe type : dus vanaf moment dat deze toestand optr tot de reparatie geweest is verstrijkt òf een volledige reparatietijd nieuw type of de resterende duur rep. tijd. nieuw type.