Uitwerking tentamen grafentheorie

26-01-05

1a) Relevante definitie: Een lijnsnede in $G = (V, E)$ is een deelverzameling van E van de vorm $[S, \overline{S}]$ waarbij $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, $S \neq V$. $[S, \overline{S}]$ noteert de verzameling lijnen met één eindpunt in S, en één in $\overline{S}$.

Voorbeeld: de graaf K_3, waarbij M bestaat uit alle lijnen.

Bewijs dat M geen lijnsnede is: Noem de punten u, v en w. Stel dat $M = [S, \overline{S}]$, en z.v.v.a. $u \in S$. aangezien $uv \in M$, zit v dus in $\overline{S}$. Op dezelfde manier volgt $w \in S$, en $u \in \overline{S}$, een tegenspraak.

Opmerking: een (kort) bewijs is nodig voor de volle punten.

1b) Dit kan bijvoorbeeld met inductie over het aantal punten.

Bewijs: Voor bomen op één punt ($T = K_1$) is de uitspraak duidelijk waar.

Stel nu dat voor iedere boom T op n punten en iedere $M \subset E(T)$, we een geldige $S \subset V$ kunnen vinden zodat $M = [S, \overline{S}]$ (inductie veronderstelling).

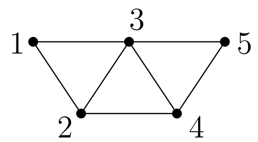
Beschouw een boom T op $n + 1$ punten, en $M \subset E(T)$. T heeft een eindpunt v (Stelling 2.35), met unieke buur u. $T' = T - v$ is nog steeds samenhangend en zonder cykels, dus T' is een boom op n punten. Op T' passen we de inductie veronderstelling toe: $M - uv = [S_1, S_2]$ voor bepaalde $S_1 \neq \emptyset$, $S_1 \neq V(T')$, $S_2 = V(T') \backslash S_1$. Stel z.v.v.a. $u \in S_1$. Als nu $uv \in M$, dan kan M geschreven worden als $[S_1, S_2 \cup \{v\}]$, en als $uv \notin M$, dan $M = [S_1 \cup \{v\}, S_2]$.

Alternatief bewijs (schets): We construeren S en $\overline{S}$ als volgt. Kies een willekeurig punt v en stel $v \in S$. Voor alle andere punten u: als het unieke pad tussen u en v een even aantal lijnen uit M bevat, ken u toe aan S, anders aan $\overline{S}$. Hiervoor kunnen we bewijzen dat geldt: $[S, \overline{S}] = M$.

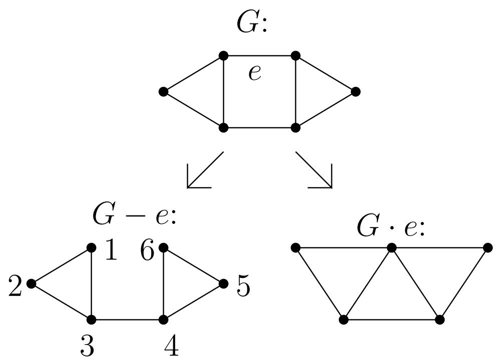
Opmerking: veel studenten kenden de correcte definitie van lijnsnede niet, en probeerden slechts te bewijzen dat $T - M$ niet samenhangend is. Dit was nog één punt waard mits er een kort en duidelijk bewijs gegeven werd, zoals:

Laat M een willekeurige niet-lege deelverzameling van de lijnen van boom T zijn. Kies een lijn $uv \in M$. Tussen u en v bestaat precies één pad in T (Stelling 2.53), dit pad bestaat dus uit de ene lijn uv. In $T - M$ is dit unieke pad verbroken en zijn u en v dus niet meer verbonden, dus $T - M$ is niet samenhangend.

2a) Dit kan met de directe methode. We kleuren de punten in de volgorde aangegeven door de nummering. Als we x kleuren hebben, zijn er voor het eerste punt x mogelijkheden. Voor punt 2 is nu een kleur verboden, dus dit punt heeft $x - 1$ mogelijkheden. Punt 3 heeft twee buren die een verschillende kleur hebben, dus hiervoor zijn $x - 2$ mogelijkheden. Op dezelfde manier zijn er voor punt 4 en 5 ook $x - 2$ mogelijkheden. Dus het aantal x-kleuringen voor G is $P_G(x) = x(x-1)(x-2)^3$.



2b) Dit kan niet op de directe manier: welke volgorde we ook kiezen, eens moet er een punt gekleurd worden waarbij we niet weten of zijn buren dezelfde of verschillende kleuren hebben. (Een punt waarbij de al-gekleurde buren geen volledige graaf induceren.) Dus we gebruiken recursie regel $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G\cdot e}(x)$



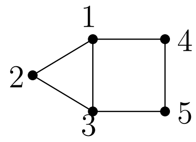
$P_{G\cdot e}$ is gelijk aan de graaf uit 2a, en voor de andere graaf kunnen we weer de directe methode gebruiken, door de punten in de aangegeven volgorde te beschouwen. Dus: $P_G(x) = x(x-1)^3(x-2)^2 - x(x-1)(x-2)^3$.

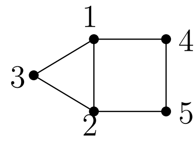
Opmerkingen:
-de andere recursie regel kan ook goed toegepast worden.
-Het is geen probleem als er bijvoorbeeld drie recursiestappen worden uitgevoerd, maar een uitwerking op twee kantjes met vele tientallen stappen wordt niet goed gerekend.

3a) We reconstrueren de bovendriehoek van de buurmatrix:

	2	3	4	5
1	1	1	1	0
2		1	0	0
3			0	1
4				1

Hierbij hoort de gelabelde graaf links:



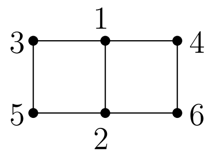


Als we nu label 2 en 3 omwisselen, krijgen we de rechter graaf, waarbij deze matrix hoort:

	2	3	4	5
1	1	1	1	0
2		1	0	1
3			0	0
4				1

Dit is een betere labeling van dezelfde graaf, en het gegeven getal is dus geen identificatie getal van Duijvestijn.

3b) Op dezelfde manier vinden we nu deze gelabelde graaf bij het getal:



We bewijzen dat voor deze graaf geen betere labeling mogelijk is:

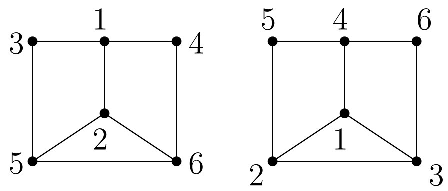
De eerste rij van de matrix kan alleen met drie enen beginnen als een punt met graad drie met 1 gelabeld wordt, en zijn buren met 2 t/m 4. Dit is hier gedaan. Aangezien $\Delta(G) = 3$, is het niet mogelijk om meer enen op de 1e rij te hebben. Vanwege de symmetrie maakt het niet uit welke van de twee graad 3 punten met 1 gelabeld wordt.

2,3 en 4 zijn onderling geen buren, dus de 2e rij begint altijd met twee nullen. We kunnen wel label 2 zo kiezen dat hierna twee enen komen, en dit is gedaan. Vanwege de symmetrie maakt het nu weer niet uit hoe we 3 en 4 kiezen.

De 3e rij moet weer met een nul beginnen. Als we nu 5 als buur van 3 kiezen, volgt hierna een 1. Nu ligt de labeling vast, en hebben we aangetoond dat deze labeling optimaal is. Dus het is wel een getal van Duijvestijn.

Opmerking: Enkele studenten redeneerden dat een punt met hoogste graad met 1 gelabeld moest worden (correct), en dat vervolgens de buur hiervan met hoogste graad label 2 moest krijgen. Deze redenering gaat niet altijd op (zie vraagstuk 59 uit het dictaat).

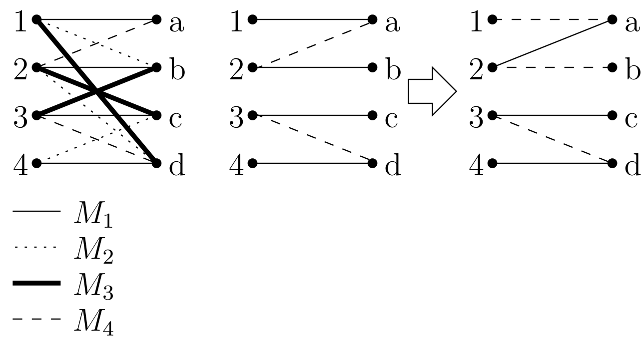
3c) Bij dit getal hoort de linker graaf:



De nieuwe labeling rechts levert getal 111001010001110, wat beter is, dus het gegeven getal is geen identificatie getal van Duijvestijn.

Opmerking: Om aan te tonen dat een getal *wel* een identificatie getal van Duijvestijn is, moeten we stap voor stap bewijzen dat er geen betere labeling is (zie 3b). Om aan te tonen dat het *geen* identificatie getal van Duijvestijn is, hoeven we slechts een betere labeling aan te geven. Dit hoeft niet eens de beste labeling te zijn.

4) We modelleren dit probleem met een graaf met punten 1-4 en a-d, waarbij lijnen voor lessen (klas/docentparen) staan. Het gegeven rooster komt overeen met een 4-lijnkleuring, ofwel met 4 disjuncte matchings $M_1, \ldots, M_4$ die samen alle lijnen bevatten. Zie de linker figuur.



We zoeken een nieuwe lijnkleuring zodat de bijbehorende matchings allemaal maximaal drie lijnen bevatten. Dit kan door een alternerend pad in $(V, M_1 \cup M_4)$ te beschouwen (zie middelste figuur), en op dit pad de lijnen om te wisselen. Dit leidt tot nieuwe matchings (zie rechter figuur), en bijbehorend rooster:

1		b	d	a
2	a	d	c	b
3	c		b	d
4	d	c		

5) Vanwege de 3-samenhangendheid bestaan er drie onafhankelijke (u, v)-paden P_1, P_2 en P_3 (Whitney 2). Omdat $d(u, v) = 10$ hebben deze paden allemaal minstens lengte 10, dus minstens 9 interne punten. Aangezien de paden geen interne punten gemeen hebben, is dus $|V(G)| \geq |V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3)| \geq 3 \cdot 9 + 2 = 29$. Vanwege de 3-samenhangendheid heeft ieder punt in G minstens graad 3 (Whitney 1). Dus $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) \geq \frac{1}{2} 29 \cdot 3 = 43,5$. Aangezien het aantal lijnen geheel is, concluderen we $|E(G)| \geq 44$.

Opmerking: enkele details/veelgemaakte fouten:
-Bij paden hoort een lengte, en bij puntenparen hoort een afstand. Verwar dit soort parameters niet.
-Het is belangrijk dat drie *onafhankelijke* paden gekozen worden.
-De drie paden hebben *minstens* lengte 10.
-We kunnen niet concluderen dat $\delta(G) = 3$, wel dat $\delta(G) \geq 3$.

6a) Kies een 3-lijnkleuring, en laat M_1, M_2 en M_3 de matchings zijn die bij de kleuren horen. Aangezien G 3-regulier en 3-lijnkleurbaar is, is ieder punt incident met een lijn van kleur 1. $G - M_1$ is dus 2-regulier. Een 2-reguliere graaf is een verzameling cykels. De lijnen van deze cykels hebben afwisselend kleur 2 en 3, dus deze cykels zijn even. En graaf zonder oneven cykels is bipartiet, dus $G - M_1$ is een bipartiete 2-reguliere graaf.

Opmerking: $G - M_1$ is dus niet één cykel, maar een verzameling cykels.

6b) Idee: In 6a hebben we aangetoond dat alle lijnen met kleur 2 en 3 op een cykel liggen. Op dezelfde manier kunnen we dit voor lijnen met kleur 1 aantonen. Dus alle lijnen liggen op een cykel. Dit leidt tot 2-lijnsamenhangendheid.

Bewijs: Bekijk weer een 3-lijnkleuring en bijbehorende matchings M_1, M_2 en M_3. Stel G is niet 2-lijnsamenhangend. Vanwege de samenhang heeft G dan een brug uv. Stel z.v.v.a. dat uv kleur 1 heeft. In $G - M_2$ ligt uv dus op een cykel (zie 6a). Dus als we uv verwijderen is de samenhang niet verbroken, een tegenspraak.

6c) Stel G is niet 2-samenhangend. Vanwege de samenhang heeft G dan een snijpunt v. Omdat $d(v) = 3$, is er in $G - v$ minstens één component van waaruit in G slechts één lijn naar v gaat. Deze lijn is een brug van G, een tegenspraak met 6b.