

Vak : **Grafentheorie**

Vakcode : 191520751

Datum : 29 januari 2013

Tijd : 13.45-16.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een rekenmachine is niet toegestaan. In dit tentamen wordt met een graaf G steeds een gewone graaf bedoeld (*simple graph*), d.w.z. G heeft geen lussen (*loops*) en twee verschillende punten worden hoogstens door één lijn verbonden.

1. [5 pt]

Toon aan dat als $\delta \geq 2$, dan bevat G een cykel van lengte minstens $\delta + 1$.

Hint: Toon eerst aan dat G een pad heeft van lengte minstens δ , en beschouw dan een langste pad in G .

2. [4 pt]

$\tau(G)$ is het aantal opspannende bomen (*spanning trees*) in de graaf G .

Bewijs de volgende stelling uit het boek:

Voor elke $e \in E(G)$ geldt: $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

3. [4 pt]

G is een samenhangende graaf met de volgende eigenschap.

Voor elke $e \in E(G)$ bestaan er twee cyclen C_1 en C_2 in G zo dat $E(C_1) \cap E(C_2) = \{e\}$.

Toon aan dat G 3-lijsamenhangend is.

4. [4 pt]

Geef een Hamiltoncykel in de graaf G in Figuur 1 (door de volgorde van de punten op zo'n cykel op te schrijven), of toon aan dat G niet Hamiltoniaans is.

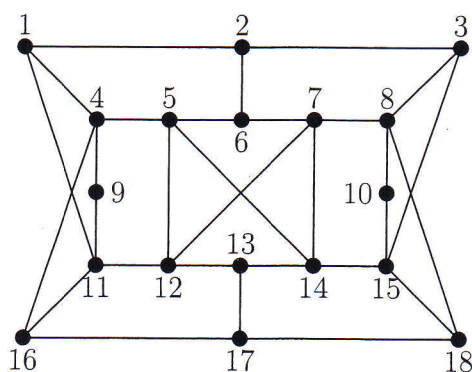


Figure 1: De graaf G bij opgave 4

5. (a) [2 pt] Formuleer de Stelling van Tutte, die nodig en voldoende voorwaarden geeft voor het bestaan van een perfecte matching in een graaf G .
- (b) [3 pt] Teken een 4-reguliere graaf die geen perfecte matching heeft en geef aan waarom niet; of toon aan dat zo'n graaf niet bestaat.
6. [4 pt]
 G is een graaf die verkregen is door in een k -reguliere graaf met een oneven aantal punten minder dan $\frac{k}{2}$ lijnen te verwijderen. Toon aan dat: $\chi' = \Delta + 1$.
7. [5 pt]
 C_n is een cykel van lengte n . Toon aan dat: $\pi_k(C_n) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.
8. [5 pt]
Laat $N = (V, A)$ een netwerk zijn met bron (*source*) x en put (*sink*) y . Laat f een stroom (*flow*) zijn in N . Bewijs de volgende stelling uit het boek:
Als N geen f -vergroterend pad (*f-incrementing path*) heeft, dan is f maximaal.
Hint: U mag gebruik maken van de stelling die zegt dat f maximaal is als N een snede (*cut*) K heeft met: $\text{val } f = \text{cap } K$.

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten