Kenmerk : TW2013/DWMP/014/ha

Vak : **Grafentheorie**
Vakcode : 191520751
Datum : 18 april 2013
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
In dit tentamen wordt met een graaf G steeds een gewone graaf bedoeld (*simple graph*), d.w.z. G heeft geen lussen (*loops*) en twee verschillende punten worden hoogstens door één lijn verbonden.

1. [4 pt]

4 Toon aan dat als $\delta(G) \geq 3$, dan bevat G een cykel van even lengte.
Hint: Beschouw een langste pad in G.

2. [5 pt]

T is een boom. Bewijs dat:
2 $\Rightarrow$ alle punten van T hebben oneven graad dan en slechts dan als voor elke $e \in E(T)$ beide componenten van $T - e$ oneven zijn (een oneven component is een component met een oneven aantal punten).

6 3. [6 pt]

Toon aan dat de k-dimensionale kubusgraaf Q_k, k-samenhangend is.

4. [4 pt]

Beschouw een "schaakbord" van 6×4 vakjes. De vakjes zijn genummerd van $(1, 1)$ tot en met $(6, 4)$. Ergens op het bord staat een paard. Het paard kan van een vakje (a_1, b_1) naar vakje (a_2, b_2) springen als $|a_1 - a_2| = 2$ en $|b_1 - b_2| = 1$ of als $|a_1 - a_2| = 1$ en $|b_1 - b_2| = 2$. In Figuur 1 staan enkele voorbeelden van paardsprongen aangegeven. Toon aan dat het onmogelijk is dat het paard in 24 achtereenvolgende sprongen elk vakje van het schaakbord bezoekt en eindigt op zijn beginvakje.

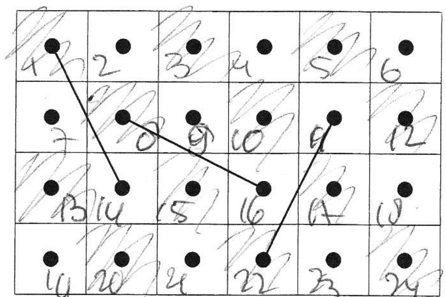

Figure 1: Het schaakbord bij opgave 4

z.o.z

5. [4 pt]
   M is een grootste matching in een bipartite graaf G.
   Toon aan dat: $|M| \geq \frac{\epsilon(G)}{\Delta(G)}$.

6. [5 pt]
   Toon aan dat: $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.

7. [4 pt]
   G is een graaf met $\chi(G) = k$. Toon aan dat: $\epsilon(G) \geq \binom{k}{2}$.

8. [4 pt]
   Beschouw een netwerk N waar bij elk tussenpunt (*intermediate vertex*) v een getal $m(v) \in Z_+$ is gegeven ($m(v)$ is de capaciteit van het punt v). Leg uit hoe men een maximale stroom f in dit netwerk kan vinden die voldoet aan: $f^-(v) \leq m(v)$ voor alle $v \in V - \{x, y\}$.
   Hint: pas het labelings-algoritme van Ford en Fulkerson toe op een aangepast netwerk.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten