

Vak : **FA 1/Analyse 1 voor TW**
Vakcode : **152130 en 152135**
Datum : 26 augustus 2005
Tijd : 9.00 - 12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Geef de definitie van een Cauchy-rij (Cauchy-sequence) in \mathbb{R} .
- (b) Definieer de rij getallen $\{a_n\}$ recursief volgens

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ en } a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}.$$

Bewijs met inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$.

- (c) Bewijs dat de rij $\{a_n\}$ een Cauchy-rij vormt.
2. (a) Laat zien dat een convergente rij precies één limietpunt heeft.
 - (b) Zij de rij $\{a_n \in \mathbb{R}\}$ gegeven door

$$a_{2n} = \frac{n+1}{n+2}, \quad n \geq 1, \text{ en } a_{2n+1} = n, \quad n \geq 0.$$

Bepaal de limietpunten van deze rij.

- (c) Is elke rij met precies één limietpunt convergent? Zo ja, bewijs dit en zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
3. (a) Geef de definities van de limsup (limit superior) en de liminf (limit inferior) van een rij $A = \{a_n \in \mathbb{R}\}$.
 - (b) Stel dat de rij A begrensd is, d.w.z. $|a_n| \leq M$ voor een $M \in \mathbb{R}$. Laat zien dat $\limsup(A)$ en $\liminf(A)$ eindig zijn.
 - (c) Zij A als in onderdeel (b). Bewijs dat $\limsup(A)$ het grootste limietpunt van de rij A is en $\liminf(A)$ het kleinste.

Z.O.Z.

4. Voor alle $j \geq 0$, beschouw de machtreeks $\sum_{j \geq 0} a_j x^j$ waarbij de $\{a_j\}$ gegeven worden door

$$a_{2j+1} = 2(j+1)9^j, j \geq 0, \text{ en } a_{2j} = 1, j \geq 0.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks $\sum a_j x^j$.

(b) Formuleer de Weierstrass M -test.

(c) Beschouw de functies

$$f_j(x) = a_j 10^{-jx}.$$

Laat zien dat er een $b \geq 0$ bestaat zodat $\sum f_j$ uniform convergeert op $[b, \infty)$.

(d) Noteer

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x), \text{ voor } x \in [b, \infty).$$

Bepaal een uitdrukking voor $f(x)$

1	a : 1	2	a : 1	3	a : 2	4	a : 2	
	b : 2		b : 2		b : 2		b : 1	
	c : 2		c : 2		c : 2		c : 2	
							d : 3	

totaal = 24 + 4 = 28 punten