

Toets 2, Lineaire Structuren II, 201300057

Datum : 18 december 2015
Plaats : Sportcentrum
Tijd : 13.45 – 15.00
Module-coördinator : B. Manthey
Docent : H. Zwart

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.

Een rekenmachine, boek, formuleblad, e.d. mogen niet gebruikt worden.

1. Gegeven is een complexe inproduct ruimte V . Zij T een zelf-geadjungeerde afbeelding van V naar V .

- (a) Bewijs dat $\langle Tx, x \rangle$ reëel is voor alle $x \in V$.
(b) Bewijs dat de nulruimte van T en T^2 gelijk zijn.

2. Gegeven is de (complexe) lineaire ruimte V die wordt opgespannen door de functies: $\{1, x, \sin(x)\}$. Op deze ruimte hebben we het inproduct

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1)$$

Zij W de lineaire deelruimte opgespannen door $\{1, x\}$.

- (a) Bepaal een orthonormale basis van W .
(b) Op de ruimte V beschouwen we de afbeelding (de tweede afgeleide)

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Is T een zelf-geadjungeerde afbeelding¹ op V ?

3. Voor $n > 1$ is gegeven de (complexe) lineaire ruimte, \mathbb{C}^n . Op deze ruimte definiëren we de volgende afbeelding

$$S(x) = (2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, x_1). \quad (2)$$

- (a) Bewijs dat S niet unitair is op \mathbb{C}^n met het standaard inproduct.
(b) Bewijs dat er een $a_n > 1$ bestaat zodanig dat de volgende gelijkheid geldt

$$S^n = a_n I.$$

- (c) Bestaat er een inproduct op \mathbb{C}^n zodanig dat S unitair is ten opzichte van dit (nieuwe) inproduct?

Puntenverdeling²

Som 1		Som 2		Som 3	
a	5	a	6	a	5
b	6	b	5	b	4
				c	5

¹Indien nodig mag men gebruiken dat de primitieve van $x \sin(x)$ gelijk is aan $-x \cos(x) + \sin(x)$

²Totaal is 40. U krijgt 4 punten gratis