

Kenmerk : TW2015/DWMP/009/ha

Course : **Mathematics A (Euclid)**

Date : September 18, 2015

Time : 15.45 – 16.45 hrs

**Motivate all your answers.
The use of electronic devices is not allowed.**

1. [3 pt]

Let $U = [-5, 5]$ and let, for $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, the intervals $A_k \subseteq U$ be given by:

$$A_k = \left[-k, \frac{1}{k}\right).$$

Determine

$$\bigcap_{k=1}^5 A_k \quad \text{and} \quad \overline{\bigcup_{k=1}^5 A_k}.$$

2. [3 pt]

Determine for $x, y \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{Z}$ respectively if the statement

$$\exists x \left(\forall y \left((x^2 + 1)y = (x + 1)\sqrt{y^2} \right) \right)$$

is true or false. Explain your answers!

3. [4 pt]

Prove with mathematical induction that for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$7^n - 1 \quad \text{is divisible by 6.}$$

4. In this exercise you don't need to evaluate binomial coefficients, like $\binom{8}{3}$. However, you must give a clear motivation to your answers!

Consider strings of length 10 consisting of the digits 0, 1, 2 and 3, for example: 0230112013 and 1300331101. Determine the number of such strings if

(a) [2 pt] Strings must contain exactly five zeros.

(b) [2 pt] Strings must contain exactly five zeros and at least three ones.

Total: 14 points

Vak : **Mathematics A (Euclides)**

Datum : 18 september 2015

Tijd : 15.45 – 16.45 uur

Motiveer al uw antwoorden.

Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.

1. [3 pt]

Laat $U = [-5, 5]$ en laat, voor $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de intervallen $A_k \subseteq U$ gegeven zijn door:

$$A_k = \left[-k, \frac{1}{k}\right).$$

Bepaal

$$\bigcap_{k=1}^5 A_k \quad \text{en} \quad \overline{\bigcup_{k=1}^5 A_k}.$$

2. [3 pt]

Bepaal voor respectievelijk $x, y \in \mathbb{N}$ en $x, y \in \mathbb{Z}$ of de bewering

$$\exists x \left(\forall y \left((x^2 + 1)y = (x + 1)\sqrt{y^2} \right) \right)$$

waar of onwaar is. Verklaar uw antwoorden!

3. [4 pt]

Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$7^n - 1 \quad \text{deelbaar is door } 6.$$

4. In deze opgave hoeft u binomiaalcoëfficiënten, zoals $\binom{8}{3}$, niet verder uit te rekenen. U dient uw antwoorden echter wel duidelijk toe te lichten!

Beschouw rijtjes van lengte 10 bestaande uit de getallen 0, 1, 2 en 3, bijvoorbeeld: 0230112013 en 1300331101. Bepaal het aantal van zulke rijtjes als

(a) [2 pt] De rijtjes exact vijf nullen moeten bevatten.

(b) [2 pt] De rijtjes exact vijf nullen en minstens drie enen moeten bevatten.

Totaal: 14 punten