# Uitwerkingen/Detailnormering Toets Mathematics A; 20 september 2013.

1. (a) $A_1 = [-1, 2)$, $A_3 = [-\frac{1}{3}, 6)$. **[0.5 pt]**

   Dus $A_1 \cap A_3 = [-\frac{1}{3}, 2)$. **[0.5 pt]**

   $A_2 = [-\frac{1}{2}, 4)$, $A_4 = [-\frac{1}{4}, 8)$ **[0.5 pt]**

   Dus $A_4 - A_2 = [4, 8)$. **[0.5 pt]**

   (Argumentatie: **[1 pt]**, antwoord: **[1 pt]**).

   (b) Waarheidstabel voor $(p \wedge q) \to r$ en $(p \to r) \wedge (q \to r)$:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \to r$ | $p \to r$ | $q \to r$ | $(p \to r) \wedge (q \to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**[2 pt]**

Conclusie: De vijfde en laatste kolom zijn niet identiek, dus de proposities zijn niet logisch equivalent. **[1 pt]**

(Duidelijke waarheidstabel opgesteld **[2 pt]** (kolom fout: $-0.5$ pt), aangegeven hoe hieruit de conclusie wordt afgeleid + juiste antwoord **[1 pt]**. Indien tabel fout maar daaruit wel op juiste manier de bijbehorende conclusie afgeleid, hiervoor wel 1 pt toekennen).

2. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i \cdot (i!) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 1 + 4 + 18 = 23.$ **[1 pt]**

   (Berekening: **[0.5 pt]**, antwoord: **[0.5 pt]**).

   (b) Basisstap voor $n = 1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i \cdot (i!) = 1$ en ook $(1+1)! - 1 = 1.$ **[0.5 pt]**

   Inductiestap:

   Laat $k \geq 1$ en stel dat: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i \cdot (i!) = (k+1)! - 1$ (Inductieveronderstelling: IV). **[1 pt]**

   We moeten nu aantonen dat uit IV volgt:

   $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot (i!) = ((k+1)+1)! - 1 = (k+2)! - 1.$ **[1 pt]**

Wel: $\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot (i!) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot (i!) + (k+1) \cdot (k+1)!.$ **[0.5 pt]**

Uit IV volgt dat dit gelijk is aan: $(k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)!.$ **[0.5 pt]**

Omschrijven van deze laatste uitdrukking geeft:

$(k+1)!(1 + (k+1)) - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$ **[0.5 pt]**

Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1.$$

(Er moet uit het bewijs duidelijk zijn op te maken wàt wordt verondersteld **[1 pt]** en wàt daarmee moet worden bewezen **[1 pt]**. Bij formuleringen als “Stel dat het klopt VOOR ALLE $n$, dan klopt het ook voor $n + 1$”: nog hoogstens 1 punt voor de hele opgave toekennen)

3. (a) Uit de $20 + 30 = 50$ leden moet een groep van 7 leden worden geselecteerd, waarbij de volgorde van selecteren niet van belang is. We zoeken dus naar het aantal 7-combinaties uit 50. **[0.5 pt]**

Dit aantal is gelijk aan: $\binom{50}{7}$. **[0.5 pt]**

(antwoord: **[0.5 pt]**, (enige) toelichting: **[0.5 pt]**).

(b) Het aantal vrouwen moet gelijk zijn aan 4, 5, 6 of 7.

Het aantal manieren om een groep van 4 vrouwen te selecteren uit 30 is gelijk aan:

$$\binom{30}{4}.$$ **[0.5 pt]**

Bij elke van deze keuzes zijn er nog $\binom{20}{3}$ manieren om zo’n bestuur aan te vullen met 3 mannen. Het aantal mogelijke besturen met precies 4 vrouwen is dus gelijk aan:

$$\binom{30}{4} \cdot \binom{20}{3}.$$ **[1 pt]**

Evenzo is het aantal mogelijke besturen met resp. 5, 6 en 7 vrouwen gelijk aan:

$$\binom{30}{5} \cdot \binom{20}{2}, \quad \binom{30}{6} \cdot \binom{20}{1} \quad \text{en} \quad \binom{30}{7} \cdot \binom{20}{0}.$$ **[0.5 pt]**

Het totaal aantal mogelijke besturen waarvan de meerderheid vrouw is, is dus gelijk aan:

$$\binom{30}{4} \cdot \binom{20}{3} + \binom{30}{5} \cdot \binom{20}{2} + \binom{30}{6} \cdot \binom{20}{1} + \binom{30}{7} \cdot \binom{20}{0}.$$ **[1 pt]**

(Alleen het juiste antwoord, zonder verdere uitleg: **[1.5 pt]** toekennen).