

**Aanwijzingen**

Voor de toets zijn **2 uren** beschikbaar. Vul op alle ingeleverde vellen uw naam en studentnummer duidelijk in.

Bij de toets mag een formuleblad gebruikt worden dat maximaal 10 magnetische beschrijvingen bevat. Dit formuleblad moet met het tentamen worden ingeleverd.

Lees voor het beantwoorden de tekst van de opgaven eerst helemaal & zorgvuldig door.

*Het aantal te behalen punten per opgave staat na het vraagnummer.*

---

---

**Vraag 1 (20pt/100)**

Een ronde staaf met massa  $m$  rolt vanuit stilstand over twee evenwijdige rails (op onderlinge afstand  $w$ ) een helling af. Zowel de staaf als de rails zijn elektrisch geleidend. Bovenaan zijn de rails met elkaar doorverbonden via een elektrische weerstand  $R$ . De helling heeft een stijgingshoek  $\alpha$  en bevindt zich in een homogeen verticaal magneetveld  $\mathbf{B}$  (figuur 1).

- 1.1** Na verloop van tijd wordt de snelheid van de staaf (asymptotisch) constant. Leg met een schets en maximaal 5 zinnen kwalitatief uit waarom dit zo is. Benoem hierbij de wetten en krachten die je in je argumentatie gebruikt.

Het omsloten oppervlak weerstand-rails-staaf vergroot en daarmee ook de magnetische flux erdoorheen. Dit induceert een e.m.f. in die kring, die evenredig is met  $v_x$  (Faraday). Hierdoor gaat er een stroom  $I$  lopen (Ohm), rechtsom in bovenaanzicht (Lenz). Het magneetveld oefent nu een Lorentzkracht  $F_L$  uit op de stroomvoerende staaf, die volgens de rechterhandregel tegengesteld is gericht aan de zwaartekracht  $F_G$ .  $F_L$  groeit met  $v_x$  tot ze  $F_G$  precies compenseert en  $v_x$  constant blijft.

- 1.2** Beschouw het probleem nu kwantitatief en bepaal de horizontale component  $v_x$  van die uiteindelijke constante snelheid. (Neem daarbij aan dat de weerstand van de staaf en rails verwaarloosbaar zijn vergeleken met  $R$ .)

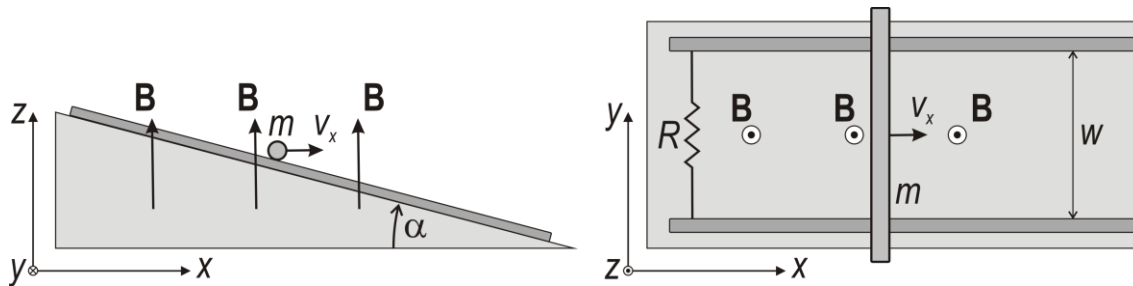
De horizontale projectie van het omsloten oppervlak is  $S = wx$ . Omdat  $\mathbf{B}$  verticaal staat, is de magnetische flux doorheen het oppervlak eenvoudigweg  $\Phi = SB$  en daarmee

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bwv_x = |e.m.f.|\ .$$

De stroom wordt dan  $I = \frac{Bwv_x}{R}$  en de (horizontale) Lorentzkracht  $F_L = wIB = \frac{B^2w^2}{R}v_x$ .

In de eindtoestand zijn de componenten  $F_L \cos \alpha$  en  $F_G \sin \alpha$  evenwijdig aan de helling even groot, en hebben we dus

$$v_x = \frac{mgR}{B^2w^2} \tan \alpha \ .$$



**Figuur 1:** Zijaanzicht (links) en bovenaanzicht (rechts) van een helling waarover een geleidende staaf door een magneetveld naar beneden rolt (*vraag 1*).

**Vraag 2 (20pt/100)**

Hieronder vind je een achttal stellingen. Geef voor elke stelling aan of ze waar (W) of niet waar (NW) is. Verantwoord je antwoord met minimaal 1 en maximaal 5 zinnen. (Lees aandachtig, elk woord kan belangrijk zijn!)

2.1 De rotatie van de magnetische vector potentiaal is altijd nul in statische situaties.

NW Rot  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \neq 0$  in het algemeen;

2.2 In een statisch probleem is de divergentie van de volume-stroomdichtheid altijd gelijk aan nul.

W Behoud van lading:  $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$ , de lading die een volume binnen stroomt moet er ook weer uit stromen;

2.3 Een ruimte met alleen een homogene stroom dichtheid bevat geen magnetisch veld.

NW Tegenvoorbeeld: het veld binnen in een stroom voerende draad met homogene stroomverdeling, dat lineair toeneemt met de afstand  $s$  tot de as van de draad;

2.4 Magnetische veldlijnen moeten altijd sluiten en mogen elkaar snijden.

NW Ze moeten wel sluiten maar mogen elkaar niet snijden, anders zou de Lorentz kracht op een bewegende lading in het snijpunt niet éénduidig bepaald zijn;

2.5 De totale statische magnetische flux (flux van het  $\mathbf{B}$ -veld) doorheen een gesloten oppervlak is altijd nul (ongeacht materiaalgrenzen en vrije stromen).

W Volgt uit  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  en Green's theorem;

2.6 De zelfinductie van een spoel is evenredig met de stroom die door de spoel loopt.

NW  $L$  is gedefinieerd als de evenredigheidsconstante tussen de flux doorheen een kring en de stroom in de kring ( $\Phi = LI$ ), en die hangt alleen van de vorm van de kring af;

2.7 Een stuk weerkijzer ( $\mu_r > 1$ ) wordt geplaatst in een magnetisch veld waarbij de normaal van het oppervlak niet parallel loopt aan de magnetische veldlijnen. Binnen in het ijzer breken de magnetische veldlijnen dan naar de normaal toe.

NW De gebonden oppervlaktestromen  $\mathbf{K}_B$ , t.g.v. magnetisatie  $\mathbf{M}$  van het ijzer versterken de // component van  $\mathbf{B}$ , zodat de veldlijnen niet van de normaal weg breken;

2.8 Een metalen schijf draait om zijn as in een homogeen magnetische veld. De draairichting van de schijf (dat is de vector die loodrecht staat op de schijf en volgens de rechterhandregel uit het oppervlak steekt) staat parallel aan de magnetische veldlijnen. Het centrum van de schijf wordt hierdoor negatief.

W De rechterhandregel toont dat positieve lading in deze situatie door de Lorentz kracht  $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  van de as weg wordt gedrukt, negatieve lading naar de as toe. Er stelt zich dan snel een evenwicht in tussen deze Lorentz kracht en de 'terugroepende' Coulomb kracht, zodat het potentiaalverschil tussen het centrum en de rand van de schijf constant wordt (Hall spanning).

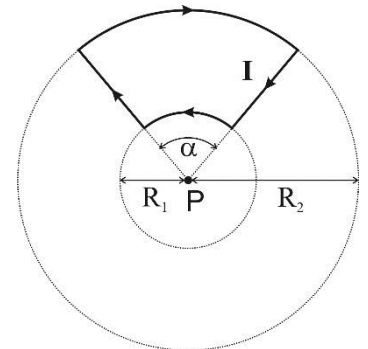
**Vraag 3 (20pt/100)**

Een draadraam in het  $xy$ -vlak voert een kringstroom  $I$  (zie figuur 2). Het raam bestaat uit twee rechte lijnstukken met ingesloten hoek  $\alpha$  en twee concentrische cirkelbogen met straal  $R_1$  en  $R_2$ .

We zoeken de magnetische inductie  $\mathbf{B}(P)$  in het snijpunt  $P$  van de 2 lijnstukken.

3.1 Toon aan dat  $\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \alpha \hat{\mathbf{z}}$  (hint: werk in cilindercoördinaten).

3.2 Gebruik de uitdrukking in deelvraag a om het veld in het centrum van een stroomvoerende cirkel te bepalen.



**Figuur 2:** Kringstroom tussen 2 cirkelsegmenten (vraag 3).

**Vraag 4 (15pt/100)**

Beschouw een (oneindige lange) rechte draad met ronde doorsnede (straal  $R$ ), waar een stroom  $I_0$  doorheen loopt. De stroom is homogeen verdeeld over de doorsnede van de draad.

4.1 Bereken de magnetische vectorpotentiaal  $\mathbf{A}$  binnen in de draad;

4.2 Bereken de magnetische vectorpotentiaal  $\mathbf{A}$  buiten de draad.

**Vraag 5 (25pt/100) Werk weer in cilindercoördinaten.**

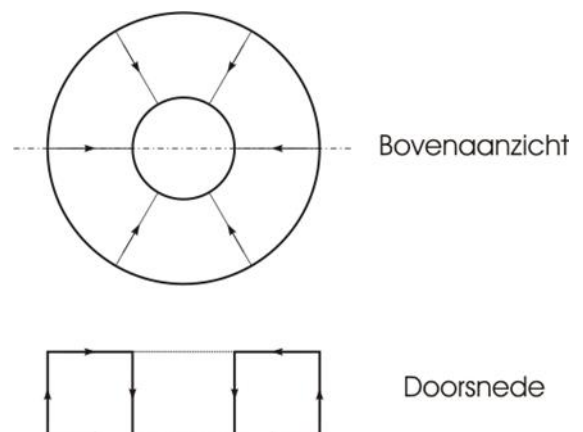
Een toroidale spoel heeft een binnendiameter  $2R$  en een vierkante doorsnede met zijde  $a$  (zie figuur 3). Ze is gewikkeld met  $N$  windingen en draagt een stroom  $I_f$ . Het veld buiten de spoel mag worden verwaarloosd.

5.1 Wat is de magnetische inductie  $\mathbf{B}(s, \phi, z)$  in de lege spoel? Geef zowel grootte als richting.

De spoel wordt nu van  $s = R$  tot  $s = R + a/2$  en over de hele hoogte  $a$  gevuld met een magnetiseerbaar medium met relatieve permeabiliteit  $\mu_r = 2$ .

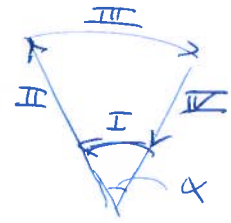
5.2 Schets, op dezelfde schaal, de grootte van  $\mathbf{B}$ , van  $\mu_0 \mathbf{H}$  en van  $\mu_0 \mathbf{M}$  als functie van  $s$ .

5.2 Bepaal de grootte en richting van de gebonden volumestroom  $\mathbf{J}_b$  en alle gebonden oppervlaktestromen  $\mathbf{K}_b$ .



**Figuur 3:** Bovenaanzicht en doorsnede van een toroidale spoel. De pijlen geven de richting van de vrije stroom  $I_f$  aan (vraag 5).

### Opgave 3



a Biot-Savart : 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I (d\vec{l} \times \vec{r})}{4\pi r^2}$$

hier bij II & IV staat  $\vec{r} \parallel d\vec{l} \Rightarrow$  uitproduct = 0

Voor I & III :  $d\vec{l} \perp \vec{r} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{matrix} \hat{z} \\ \downarrow \\ - \end{matrix} \cdot \begin{matrix} R_1 \cdot 2\pi \\ R_2 \cdot 2\pi \end{matrix}$

$$\Rightarrow B = \int_0^\alpha \frac{\mu_0 I \cdot r \, d\varphi}{4\pi r^2} \quad d\vec{l} = r \, d\varphi$$

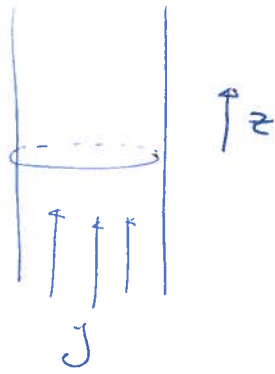
$$B_I = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\alpha}{R_1}$$

$$B_{III} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\alpha}{R_2} \Rightarrow B_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \cdot \alpha$$

b Als  $R_2 \rightarrow \infty$  &  $\alpha \rightarrow 2\pi$

$$\Rightarrow B_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cdot \alpha = \frac{\mu_0 I}{2R_1}$$

## Opgave 4



$$J = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}$$

$$\oint H dl = I_{\text{encl.}}$$

### Binnen de draad

Ampère loop met straal  $s$  ( $< R$ ):  ~~$2\pi s H = \pi s^2 J$~~   ~~$\Rightarrow H = \frac{\pi s^2 J}{2\pi s}$~~

$$2\pi s H = \pi s^2 J = I \frac{s^2}{R^2} \Rightarrow H = \frac{I s}{2\pi R^2} \hat{\varphi}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{\mu I s}{2\pi R^2} \hat{\varphi} \quad (\text{let } \varphi: \text{ het is } \mu, \text{ niet } \mu_0)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \text{ kies } \vec{A} = A_z \hat{z} \Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial s} = \frac{\mu I s}{2\pi R^2}$$

$$A_z = -\frac{\mu I s^2}{4\pi R^2} + \text{const}_1$$

### Buiten de draad

Ampère loop met  $s > R$ ,  $I_{\text{encl}} = I$

$$2\pi s H = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \text{ kies wederom } \vec{A} = A_z \hat{z} \Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

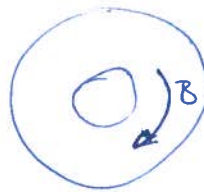
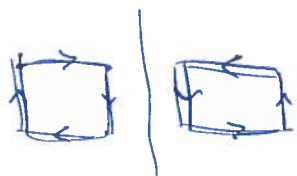
$$\Rightarrow A_z = -\ln(s) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} + \text{const}_2$$

### Beide stukken aansluiten op $s = R$

$$\Rightarrow -\ln(R) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} + \text{const}_2 = -\frac{\mu_0 I R^2}{4\pi R^2} + \text{const}_1$$

$$\text{kies: } \text{const}_2 = 0, \text{ const}_1 = \mu_0 I (\ln(R) + \mu r)$$

# Opgave 5



5.1 Rechter-hand regel voor spoel:  $B$  alleen afhankelijk van  $s$  en  $B$  wijst in de  $-\hat{\varphi}$  richting

Voor een Ampère loop ergens in de spoel (straal  $s$ ,  $R < s < R+a$ )

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{enc}} = -N \cdot I, \quad N = \text{aantal windingen van de spoel.}$$

-teken omdat  $\vec{H}$  er in prikken in de  $-z$  richting

$$2\pi s H = -N I$$

$$\vec{H} = -\frac{NI}{2\pi s} \hat{\varphi} \quad \text{voor } R < s < R+a$$

$\vec{H} = 0$  daarbuiten.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 NI}{2\pi s} \hat{\varphi}$$

5.2 Nu met gedeeltelijk materiaal:

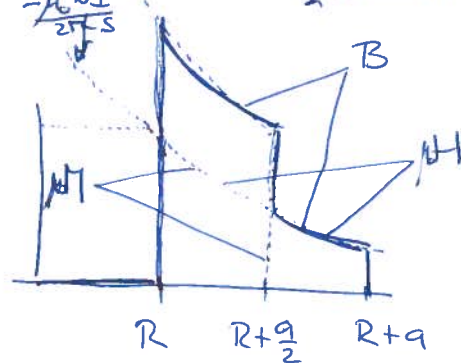


$\vec{H}$  blijft hetzelfde

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}, \quad \chi_m = \mu_r - 1 \quad \text{en} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

met  $\mu_r = 2 \Rightarrow \chi_m = 1$

en dus:  $B = 2\mu_0 H$ ,  $M = H$



$\Rightarrow$  voor  $R < s < R+a/2$

$$B = 2\mu_0 H, \quad M = \mu_0 H = -\mu_0$$

Voor  $R+a/2 < s < R+a$

$$B = \mu_0 H, \quad M = 0$$

5.3  $M = -\frac{\mu_0 NI}{2\pi s} \hat{\varphi}$  (voor  $\mu_r = 2$ )

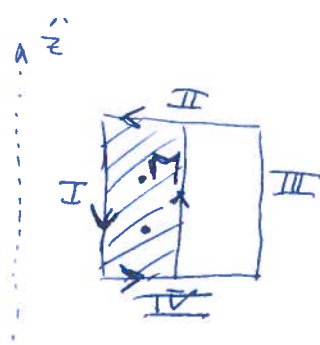
$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = (\text{cilinder coördinaten}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( s \cdot \frac{1}{s} \right) \right] \hat{z}$$

$\Rightarrow J_b = 0$

S.3 vervolg.

$$h_b = \vec{M} \times \vec{n}$$

met  $M$  in de  $-\varphi$  richting



I:  $\hat{n} = -\hat{s} \Rightarrow h_b$  staat in de  $-\hat{z}$  richting

II:  $\hat{n} = +\hat{z} \Rightarrow h_b$  " " "  $+\hat{s}$  "

III:  $\hat{n} = +\hat{s} \Rightarrow$  " " "  $-\hat{z}$  "

IV:  $\hat{n} = -\hat{z} \Rightarrow$  " " "  $+\hat{s}$  "

$h_b$  loopt in dezelfde richting als de vrije stroom in de spoel en versterkt daarmee het  $\vec{B}$  veld

$$\text{De grootte van } h_b = |\vec{M}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

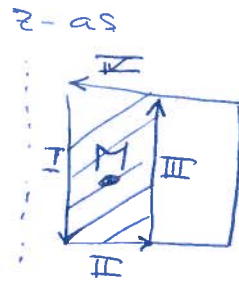
$$\Rightarrow \text{op I: } \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\text{op } s^a = R + \frac{a}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R + a/2)}$$

Op het boven- en ondervlak neemt de hoeveelheid stroom linear ~~toe~~ met de straal. Dat kan omdat ook de "ruimte voor de stroom" op het oppervlak schaakt met  $s$ .



### 5.3 verdedig



$$k_b = \vec{M} \times \vec{n}$$

met  $M$  in de  $-z$  richting

I	$\hat{n} = -\hat{s}$	$\Rightarrow k_b$ staat in de $-\hat{z}$ richting
II	$+\hat{z}$	$+\hat{s}$
III	$+\hat{s}$	$+\hat{z}$
IV	$+\hat{z}$	$-\hat{s}$

$k_b$  loopt daarmee in dezelfde richting als de stroom in de spoel en versterkt daarmee het  $\vec{B}$  veld (t.o.v. het  $B$  veld voor de lege spoel)

De grootte van  $k_b = |M| = \frac{\mu_0 I N}{2\pi s}$

Op I:  $\frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$  , op III:  $\frac{\mu_0 N I}{2\pi (R + a/2)}$

Op het baven-, en anderszals neemt de gebonden oppervlakte stroomdichtheid af met de straal ( $\frac{1}{s}$ )

De totale hoeveelheid gebonden stroom blijft hetzelfde omdat het oppervlak (eveneens de ~~stroom~~ omtrek) groter wordt (met  $s$ ). Er "verdwijnt" dus geen stroom.