Reparatietoetsen Statistiek - 7 november 2014, 8.45 – 11.45 uur

Er mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen telefoon of GR).
Separaat zijn de tabellen bijgevoegd. Motiveer je antwoorden duidelijk.

Geef boven het werk aan welke (deel)toets je wil herkansen: toets 1, toets 2 of beiden.
Maak vraag 1-4 om de 1e deeltoets te herkansen: tijdsduur 2 uur.
Maak vraag 4-7 om de 2e deeltoets te herkansen: tijdsduur 2 uur.
Maak vraag 1-7 om beide deeltoetsen te herkansen: tijdsduur 3 uur.

---

1. Zij X een stochastische variabele met de t-verdeling met 1 vrijheidsgraad.
   Hebben X^2 en $1/X^2$ dezelfde verdeling? Motiveer uw antwoord.

2. Zij n in $\mathbb{N}$ met $n \geq 2$ en zij $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit X met X $B(m, p)$-verdeeld, voor onbekende p in $(0, 1)$ en onbekend geheel getal $m \geq 1$.
   Schat m en p met de methode van momenten.

3. Zij $n \in \mathbb{N}$ en $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit X, met X normaal verdeeld met verwachting 0 en onbekende variantie σ^2.
   Beschouw de familie van schatters $S^2(a) = a \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ voor $a \in \mathbb{R}$.

   a. Bepaal de onzuiverheid ("bias") van $S^2(a)$.
   b. Bepaal de variantie van $S^2(a)$. (Hint: $E(X^4) = 3\sigma^4$).
   c. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de verwachte kwadratische fout ("MSE") van $S^2(a)$ minimaal?
   d. Laat m.b.v. Chebyshev's ongelijkheid zien dat de rij schatters $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ in kans naar σ^2 convergeert.
   (Chebyshev's ongelijkheid luidt: $P(|Y - E(Y)| \geq c) \leq \frac{var(Y)}{c^2}$ voor elke stochast Y en elke $c > 0$)

4. Zij $n \in \mathbb{N}$ en zij $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit X, met X (continu) uniform verdeeld op het interval $[0, \theta]$, voor een onbekende $\theta > 0$.

   a. Laat zien dat de meest aannemelijke schatter (MLE) van θ gegeven wordt door $max(X_1, \ldots, X_n)$.

   Beschouw de hypotheses $H_0: \theta \leq 1$ tegenover $H_1: \theta > 1$, en beschouw de aannemelijkheids-quotiënttoets ("likelihood ratio test") met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 5\%$.

b. Laat zien dat de toetsingsgrootheid behorend bij de aannemelijkheidsquotiënt-toets gelijk is aan $\Lambda = \begin{cases} 0 & \text{als } \max(X_1, \dots, X_n) > 1 \\ 1 & \text{als } \max(X_1, \dots, X_n) \leq 1 \end{cases}$ (Gebruik hierbij $\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)}$)

Neem vervolgens aan dat, voor alle n, H_0 verworpen wordt precies dan als $\Lambda = 0$.

c. Bereken de onbetrouwbaarheid en het onderscheidend vermogen van deze toets.
d. Is deze toets zuiver? Motiveer uw antwoord.
e. Is deze toets consistent? Motiveer uw antwoord.

5. Van de 25 deelnemers aan een bepaald statistiektentamen halen er 10 een voldoende. Zij p de kans dat een willekeurige student een voldoende haalt.
   a. Test $H_0 \colon p = \frac{1}{2}$ tegenover $H_1 \colon p \neq \frac{1}{2}$ met onbetrouwbaarheid $\alpha_0 = 0.10$, m.b.v. de (tweezijdige) overschrijdingskans.
   b. Leid een (exact) naar beneden begrensd 95% betrouwbaarheidsinterval voor p af

6. Zij n en m gehele getallen groter dan of gelijk aan 2. Zij X $N(\mu_X, \sigma_X^2)$-verdeeld en Y normaal $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$-verdeeld, voor onbekende μ_X, σ_X^2, μ_Y en σ_Y^2.
   We nemen 4 o.o. trekkingen uit X en 2 o.o. trekkingen uit Y en verkrijgen de volgende realisaties: $(X_1, \dots, X_4) = (1.03,\ 2.15,\ 3.62,\ 10.63)$
   $(Y_1, Y_2) = (0.07, 1.13)$

   a. Toets de gelijkheid van varianties van X en Y, bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.10$.
   b. Toets $\mathrm{H}_0 \colon \mu_X = \mu_Y$ tegen $\mathrm{H}_0 \colon \mu_X \neq \mu_Y$ (uitgaande van gelijkheid van varianties) met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.10$.
   c. Stel dat er, vanwege twijfels over de normaliteitsaanname, gekozen moet worden voor een parametervrij alternatief: welke toets kunnen we dan gebruiken om na te gaan of de uitkomsten van X structureel hoger zijn dan die van Y? Voer de toets uit met $\alpha_0 = 0.10$.

7. Beschouw de data X_1, X_2, X_3, X_4 en Y_1, Y_2 uit opgave 6.

   a. Geef een naar boven begrensd 95%-betrouwbaarheidsinterval voor μ_X.
   b. Geef een tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor σ_Y^2.

Normering

1	2	3				4					5		6			7		
		a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	a	b	c	a	b	Totaal
2	3	1	2	2	2	3	2	3	2	2	2	3	3	3	3	2	2	42