

Toets 1 Statistiek - 26 september 2014 13:45 - 15:30

Deze toets bestaat uit zes vragen. Er mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (maar geen telefoon). Motiveer je antwoorden duidelijk.

Er kunnen maximaal 15 punten behaald worden. Uw cijfer op toets 1 is gelijk aan $1 + \frac{9x}{15}$, waarbij x het door u behaalde aantal punten is. Het maximum aantal te behalen punten per (deel)vraag is gegeven in de volgende tabel:

Vraag	1a	1b	2	3	4a	4b	5a	5b	5c	5d	5e	6
Punten	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2

Je mag gebruik maken van onder meer de volgende feiten/formules:

- Als X uniform verdeeld is op $[a, b]$, met $a < b$, dan is $\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- Als X een t -verdeling heeft met $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ vrijheidsgraden, dan is $E(X) = 0$ en $\text{var}(X) = \frac{n}{n-2}$.
- Als X Poisson verdeeld is met gemiddelde μ , dan is $P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, voor alle $k = 0, 1, \dots$

1. Zij $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 2$, en zij X_1, \dots, X_n een aselechte steekproef uit een chikwadraatverdeling met m vrijheidsgraden. Zij verder $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ het steekproefgemiddelde en $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ de steekproefvariantie.
 - a. Wat is de variantie van het steekproefgemiddelde?
 - b. Wat is de verwachting van de steekproefvariantie?
2. Zij X een stochastische variabele met de t -verdeling met $n \in \mathbb{N}$ vrijheidsgraden. Welke (bekende) verdeling heeft $\frac{1}{X^2}$?
3. Zij $n \in \mathbb{N}$ en X_1, \dots, X_n een aselechte steekproef uit X , waar X de t -verdeling heeft met een onbekend aantal vrijheidsgraden $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Schat m met de momentenmethode ("method of moments").
4. Zij $n \in \mathbb{N}$ en X_1, \dots, X_n een aselechte steekproef uit X , met X uniform (continu) verdeeld op $[0, \theta]$, voor een onbekende $\theta > 0$. Beschouw de schatters $\hat{\theta}(a) = a \cdot \max(X_1, \dots, X_n)$ voor $a \in \mathbb{R}$.
 - a. Bepaal voor elke $a \in \mathbb{R}$ de onzuiverheid ("bias") en variantie van $\hat{\theta}(a)$.
 - b. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de verwachte kwadratische fout ("MSE") van $\hat{\theta}(a)$ minimaal?

5. Zij $n \in \mathbb{N}$ en X_1, \dots, X_n , met $n \in \mathbb{N}$, een aselechte steekproef uit X , met X Poisson verdeeld met gemiddelde $\mu \in \{0,1\}$. Beschouw de twee hypothesen $H_0: \mu = 1$ tegenover $H_1: \mu = 0$. Beschouw de toets die H_0 verwerpt als $\sum_{i=1}^n X_i = 0$ met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$.
- Bereken de onbetrouwbaarheid van deze toets.
Voor welke waarden van n is de onbetrouwbaarheid lager dan α_0 ?
 - Bereken het onderscheidend vermogen van deze toets.
 - Is deze toets zuiver? Motiveer uw antwoord.
 - Is deze toets consistent? Motiveer uw antwoord.
 - Neem aan dat $n \geq 3$. Is deze toets MP ("Most Powerful") voor onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05? Motiveer uw antwoord.
6. Zij $n \in \mathbb{N}$ en X_1, \dots, X_n een aselechte steekproef uit X , met X uniform (continu) verdeeld op $[\theta^{-1}, \theta]$ voor een onbekende $\theta > 1$.
Bepaal de meest-aannemelijke schatter ("maximum likelihood estimator") van θ .