Deeltoets 2: Analyse II

Statistiek en Analyse (201400218), 2014-2015

23-oktober-2014, 10:45 – 12:15 Totaal Punten : 22

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Antwoorden mogen zowel in het Engels als in het Nederlands gegeven worden.
Success!

1. (a.) Zij X en Y metrische ruimtes met metrieken, respectievelijk, ρ en τ. Beschouw een functie $f : X \to Y$. Wanneer is de functie f continu in het punt $a \in X$? En op X? [2]

   (b.) Bewijs dat $f : X \to Y$ continu is (op X) dan en slechts dan indien $f^{-1}(C)$ open is in X voor iedere open verzameling C in Y. [4]

2. Zij E een niet-lege deelverzameling van een metrische ruimte X en $E \neq X$.

   (a.) Geef de definitie van de rand, ∂E, van E. [1]

   Herinner dat het inwendige, E^0, van E de grootste open verzameling is binnen E en dat de afsluiting, $\overline{E}$, van E de kleinste gesloten verzameling is die E bevat.

   (b.) Bewijs dat $\left(\overline{E}\right)^c = \left(E^c\right)^0$ [3]

   [Hint: De relatie tussen ∂E en $\partial(E^c)$ kan nuttig zijn.]

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a.) Is de functie f continu op $(0,0)$? [1]

   (b.) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ op $\mathbb{R}^2$. [2]

   (c.) Onderzoek of de functie f differentieerbaar is op $(0,0)$. [3]

4. (a.) Geef de impliciete functiestelling. [2]

   (b.) Beschouw de volgende relaties:

$$\begin{aligned} u^2 + xv + y &= 0 \\ yu + v^3 + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

   Geven de relaties voldoende grond om u en v te kunnen beschouwen als (zuivere) functies van x en y in een bepaald gebied, bijvoorbeeld, rond het punt $(x,y) = (1,1)$, zodat (u,v) op deze punt de waarde $(0,-1)$ aanneemt? Als ze bestaan, wat voor verdere eigenschappen (continuiteit, differentieerbaarheid, e.d.) hebben deze functies? [4]

Cijfer: $\dfrac{\text{behaalde punten}}{22} \times 9 + 1$ (afgerond tot twee decimalen)