

Dynamische Systemen – Toets 1 (Herkansing)

19 december 2014, 8.45-11.45

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is wel toegestaan.

3p

Opgave 1. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x(t)}{t} + e^t, \quad \text{met } x(1) = 1.$$

Geef ook het domein waarop de oplossing bestaat.

4p

Opgave 2. We definiëren de matrix A en vectoren b en x_0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los op $\frac{dx}{dt} = Ax + b(t)$ met $x(0) = x_0$.

Opgave 3. We bekijken het volgende stelsel

$$\begin{cases} x' = 3x - y - x^3, \\ y' = y^2 - x^2. \end{cases} \quad (1)$$

- 2 (a) Schets de nullclines in het fasevlak. Zet ook pijltjes op de nullclines voor de richting van het vectorveld.
- 3 (b) Vind alle evenwichten van (1).
- 4 (c) Classificeer alle evenwichten. Schets ook de lokale faseplaatjes op grond van de linearisatie en nullclines.

Opgave 4. We bekijken het stelsel (2) waarin a een parameter is.

$$\begin{cases} x' = x + 2y(1 - ay) - x(x^2 + y^2), \\ y' = y + 2x(ay - 1) - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2)$$

- 3 (a) Transformeer het stelsel (2) naar poolcoördinaten.
- 2 (b) Laat zien dat de cirkelschijf $U = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$ positief invariant is.
- 2 (c) Geef alle a zodat het stelsel (2) drie evenwichten heeft.
- 3 (d) Schets (globale) faseplaatjes van (2) voor $a = 0$, $a = 1$ en $a = 2$.

Z.O.Z.

OPGAVEN NUMERIEKE WISKUNDE

Opgave 5.

Gegeven is de functie

$$f(x) = 1 - x^3, \quad 0 < x < 1.$$

- Geef de definitie van het conditiegetal $c_P(x)$ voor het probleem: bereken $f(x)$.
- Bepaal dit conditiegetal $c_P(x)$. Voor welke waarden van x wordt een relatieve inputfout niet versterkt in de output?
- Bekend is dat de relatieve fout in x van de orde 10^{-3} is. Hoe groot moet het conditiegetal (tenminste) zijn indien we geen significante cijfers meer kunnen verwachten als we $f(x)$ evalueren? Voor welke waarden van x gebeurt dit?

Opgave 6.

M.b.v. een numeriek integratieproces vinden we voor een zekere integraal I de volgende benaderingen $I(h)$ bij diverse stapgroottes h :

	h	$I(h)$
SS	1/2	3.26914555200204
S	1/4	3.26485038742132
M	1/8	3.26459370399133
E	1/16	3.26457783407070

- Bepaal de (geheeltallige) orde p van dit proces op grond van de waarden in de tabel, m.a.w. bepaal de waarde van p in de uitdrukking $I(h) = I + ch^p + O(h^{p+1})$, $p \in \mathbb{N}$.
- Voer één extrapolatie uit om een betere benadering voor I te bepalen, inclusief foutschatting.

Maximaal aantal punten per opgave (Max 36):

1	3pt	3	(2+3+4)pt	5	(1+1+2)pt
2	7pt	4	(3+2+2+3)pt	6	(2+2)pt

Cijfer = 1 + punten/4;