

Voorbeeld Toets 1 – Module 6 Dynamische Systemen

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is wel toegestaan.

Opgave 1. Bepaal de oplossing van de 1e orde DV

$$\frac{dx}{dt} = x(t)^2 + 1 \quad \text{met} \quad x(0) = 0.$$

Geef ook het domein waarop de oplossing bestaat.

Opgave 2. Schets faseplaatjes behorende bij de stelsels $y' = A_i y$ met

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3. Bepaal e^{Bt} voor

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. Neem de differentiaalvergelijking $x' = x^3 + 6x^2 + 9x + a$.

- Teken faselijnen voor $a = -1$, $a = 0$ en $a = +1$.
- Geef alle a zodat er precies drie evenwichten zijn.

Opgave 5. Gegeven het systeem van gekoppelde oscillatoren

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - y_1 - x_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \dot{y}_1 = x_1 + y_1 - y_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \dot{x}_2 = x_2 - y_2 - x_2(x_2^2 + y_2^2) - 2x_2(x_1^2 + y_1^2), \\ \dot{y}_2 = x_2 + y_2 - y_2(x_2^2 + y_2^2) - 2y_2(x_1^2 + y_1^2). \end{cases} \quad (1)$$

- Transformeer het systeem naar poolcoördinaten met $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ en $\tan \phi_i = y_i/x_i$ voor $i = 1, 2$.
- Laat zien dat het systeem twee periodieke banen heeft. Welke is asymptotisch stabiel?

Opgave 6. We beschouwen het randwaardeprobleem:

$$y''(x) = x^2 y(x) + \sin(x), \quad \leftarrow \quad (2)$$

met randcondities

$$y(1) = 1, \quad y(3) = 0. \quad (3)$$

We kiezen een uniform rooster op het interval $[1,3]$ bestaande uit $n + 1$ punten, met onderlinge afstand h . De roosterpunten noemen $x_k, k = 0, \dots, n$, met $x_0 = 1, x_n = 3$. De bijbehorende $n + 1$ waarden y_k zijn benaderingen van $y(x_k)$.

De tweede orde afgeleide wordt benaderd met

$$y''(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}).$$

- Bepaal de differentievergelijkingen die de vergelijking (2) in x_1 en x_{n-1} benaderen. Formuleer uw antwoord in termen van $\{y_k\}$ en gebruik de randcondities in (3).
- Beschrijf het lineaire stelsel vergelijkingen dat moet worden opgelost om de waarden $\{y_k\}$ te verkrijgen.

Opgave 7. Met behulp van een numeriek integratieproces vinden we voor een zekere integraal I de volgende benaderingen $I(h)$ bij diverse stapgroottes h :

h	$I(h)$
1/2	3.26914555200204
1/4	3.26485038742132
1/8	3.26459370399133
1/16	3.26457783407070

- Bepaal de (geheeltallige) orde p van dit proces op grond van de waarden in de tabel, m.a.w. bepaal de waarde van p in de uitdrukking $I(h) = I + ch^p + O(h^{p+1}), p \in \mathbb{N}$.
- Voer één extrapolatie uit om een betere benadering voor I te bepalen, inclusief foutschatting.