

Toets T1 Differentiaalvergelijkingen

Module : TW M6 Dynamische Systemen (201500103)
Datum : Dinsdag 1 december 2015
Tijd : 8:45 - 11:45 uur
Tijdsduur dit deel : 180 min (studenten met recht op extra tijd: 225 min)
Module-coördinator : H.G.E. Meijer
Docent : H.G.E. Meijer

Type tentamen : Gesloten boek
Bijlage : Geen
Toegestane middelen : (Grafische) Rekenmachine

Aanwijzingen:

- Motiveer uw antwoorden.
- Deze toets bestaat uit 3 pagina's (inclusief voorblad), en bevat 7 opgaven.
- Met deze toets kun je 36 punten verdienen. De normering (puntenverdeling) staat vermeld onderaan dit voorblad.
- Studenten die alleen Gewone Differentiaalvergelijkingen volgen, kunnen vraag 6 en 7 overslaan. Deze tellen dan niet mee in de normering.
- Gebruik uitsluitend het UT tentamenpapier. Zet op elk vel papier je naam en je studentnummer. Lever geen kladpapier in.

Normering:

1	4	3b	3	4b	2	5c	3	6b	2
2	6	3c	3	5a	1	5d	1	7a	1
3a	2	4a	2	5b	3	6a	1	7b	2

Cijfer = (4+punten)/4

Opgaven Gewone Differentiaalvergelijkingen

Opgave 1. Bepaal de oplossing van de 1e orde DV

$$(1+t)\frac{dx}{dt} = x(t) + t, \text{ met } x(0) = 1.$$

Geef ook het domein waarop de oplossing bestaat.

Opgave 2. Bepaal e^{At} voor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3. We bekijken het volgende stelsel met $x, y \geq 0$ en parameter $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = x(2 - 2x - ay), \\ y' = y(3 - 2x - y). \end{cases}$$

- (a) Bepaal voor welke a er een positief evenwicht is, d.w.z. met positieve x en y coördinaat.
- (b) Bepaal de aard van het positieve evenwicht.
- (c) Schets het faseplaatje in het xy -vlak voor $a = .5$ en $a = 1$, inclusief nullclines.

Opgave 4. We bekijken het volgende stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = y - x - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Transformeer het stelsel naar poolcoördinaten.
- (b) Teken het faseplaatje in het xy -vlak.

Opgave 5. We bekijken het volgende stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + y^2 - x^3 + x^5, \\ \dot{y} = x - xy. \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Bepaal de vier evenwichten.
- (b) Bepaal het type van het evenwicht op basis van de linearisatie.
- (c) Gebruik de Lyapunov-functie $V = x^2 + y^2$ om te laten zien dat de oorsprong asymptotisch stabiel is.
- (d) Geef een schatting van het attractiegebied op basis van deze Lyapunov-functie V .

Z.O.Z.

Opgaven Numerieke Wiskunde

Opgave 6.

- (a) Wat is de uitdrukking voor het conditiegetal van het probleem: "bereken de waarde van de functie f in een bepaald punt x "?

Bereken dit conditiegetal indien f gegeven wordt door

$$f(x) = \tan x \left(\equiv \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

- (b) Stel dat we de waarde van $x = 0.68$ verkregen hebben uit een meting, maar dat er mogelijk een absolute fout van 0.01 op zit. Nu willen we $f(x)$ bepalen.

(b1) Hoe groot is in dit geval het conditiegetal?

(b2) Wat kun je uit (b1) concluderen omtrent de relatieve fout die mogelijk gemaakt wordt in het berekenen van $f(x)$ bij dit meetpunt?

Opgave 7. M.b.v. een numeriek integratieproces vinden we voor een zekere integraal I de volgende benaderingen $I(h)$ bij diverse stapgroottes h :

h	$I(h)$
1/2	3.26914555200204
1/4	3.26485038742132
1/8	3.26459370399133
1/16	3.26457783407070

- (a) Bepaal de (geheeltallige) orde p van dit proces op grond van de waarden in de tabel, m.a.w. bepaal de waarde van p in de uitdrukking $I(h) = I + ch^p + O(h^{p+1})$, $p \in \mathbb{N}$.
- (b) Voer één extrapolatie uit om een betere benadering voor I te bepalen, inclusief foutschatting.