Dynamische systemen (201500103) — toets 2 — HER

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden
Een eenvoudige (niet-programmeerbare) rekenmachine mag worden gebruikt

Datum: 29-01-2016
Zaal: CR-3F
Tijd: 08:45-11:45

1. Beschouw

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} x.$$

   (a) Is het systeem waarneembaar?

   (b) Bepaal de niet-bereikbare ruimte.
   (Dit antwoord kan van α afhangen.)

   (c) Voor welke α is het systeem stabiliseerbaar?

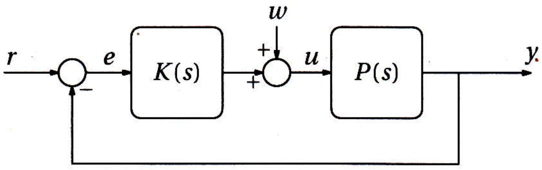
   (d) Neem nu $\alpha = 0$. Bepaal een toestandsterugkoppeling waarvoor $A + BF$ de eigenwaarden $-1, -2$ heeft

   (e) Neem $\alpha = 0$. Bepaal een regelbaar, samengesteld uit een waarnemer en een toestands-terugkoppeling, die de gesloten lus stabiliseert.

2. Welke differentiaalvergelijking $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})y = Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})u$ heeft deze toestandsrepresentatie:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + u.$$

3. Beschouw onderstaand gesloten-lussysteem met $K(s)$ en $P(s)$ rationale functies: $K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$, $P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$.



   (a) Bepaal de overdrachtsfunctie van w naar e

   (b) Vertragingen in de lus bemoeilijken de regeling. Een vertraging met τ tijdseenheden is goed te benaderen met $\frac{1-\tau s/2}{1+\tau s/2}$. Ga na voor welke $\tau \geq 0$ de regelaar $K(s) = 1/s$ de gesloten lus met

$$P(s) = \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2}$$

   stabiliseert.

4. Beschouw het systeem

$$\dot{y}(t) + y(t-1) = u(t) - \dot{u}(t-1).$$

Als $y(t) = u(t) = 0$ voor alle $t < 0$ dan is dit systeem LTI en BIBO-stabiel.

   (a) Bepaal de frequentieresponsie $H_{y/u}(\mathrm{i}\omega)$.

   (b) Voor $u(t) = \cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)$ convergeert de uitgang $y(t)$ naar een harmonische functie $A\cos(\omega_0 t + \phi)$ met $A \geq 0$. Voor welke ω_0 is de amplitude A gelijk aan 1?

   (c) De maximale piekversterking is moeilijk te bepalen. Welke ondergrens volgt uit deel (b) van deze opgave? [Als (b) niet is gelukt bedenk dan een redelijke ondergrens.]

5. Drie vragen.

   (a) Stel A is een $n \times n$ matrix. Als een systeem $\dot{x} = Ax + Bu$ regelbaar is geldt dan dat $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \geq n$?

   (b) Wat is een geschikte definitie van *stabiliseerbaarheid* van een niet-lineair systeem $\dot{x} = f(x, u)$?

   (c) Is het systeem $y(t) = u^2(t-1)$ tijdinvariant?

6. **Deel van NumWis**: Er bestaan veel manieren om een gewone differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y), \quad y(0) = y_0,$$

numeriek op te lossen. Hierin is f een gegeven functie, en y_0 een gegeven getal.

Eén zo'n numerieke methode is de zogenaamde *midpuntregel*. Als we y_n schrijven voor de numerieke benadering op $t_n = nh$, met h de stapgrootte, ziet deze methode er als volgt uit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1/2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})).$$

   (a) Is deze methode een expliciete of impliciete methode?

   (b) In het algemeen kan worden bewezen dat de methode een lokale afbreekfout van orde 3 heeft. Wat kunt u daaruit concluderen voor de *globale* afbreekfout?

   (c) Stel we hebben een implementatie van de midpuntregel geschreven voor willekeurig rechterlid $f(t, y)$ en we willen die testen. Beschrijf in detail welke numerieke experimenten u in die test wilt opnemen en hoe u de resultaten analyseert.

opgave:	1	2	3	4	5	6
punten:	2+2+2+2+2	3	2+2	2+2+2	2+3+2	6

Tentamencijfer: $1 + 9p/36$.