

### Opgaven Gewone Differentiaalvergelijkingen

**Opgave 1.** Gegeven is de matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$  en twee vectoren  $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 9e^{-t} \end{pmatrix}$  en  $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- (a) Bepaal  $e^{At}$ .
- (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem  $y' = Ay + f$  en  $y(0) = y_0$ .  
Als (a) niet gelukt is, gebruik dan  $e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ .

**Opgave 2.** We bekijken het volgende stelsel

$$\begin{cases} x' = x(x+y), \\ y' = x^2 + 2xy + x + 2y + 2. \end{cases}$$

- (a) Bepaal de evenwichten.
- (b) Voor elk evenwicht bepaal de linearisatie en het type(aard) van het evenwicht.
- (c) Schets het faseplaatje in het  $xy$ -vlak met de nullclines. Geef ook de richting van het vectorveld op de nullclines aan.
- (d) Schets enkele banen lokaal rond de evenwichten. Gebruik hierbij de linearisatie en/of de nullclines.

**Opgave 3.** We bekijken de volgende 2e orde differentiaalvergelijking

$$x'' - x'(1 - 7(x')^2 - 5x^2) + x = 0. \quad (1)$$

- (a) Zet deze 2e orde DV om naar een eerste orde stelsel.
- (b) Laat zien dat de cirkelschijf met  $\frac{1}{7} < r < \frac{1}{2}$  een positief invariant gebied is.
- (c) Bewijs dat (1) een periodieke oplossing heeft.

**Opgave 4.** Neem de DV  $x' = f(x) + a$  met  $f(x) = 3x - x^3$  met een parameter  $a$ .

- (a) Voor welke  $a$  heeft het systeem 3 evenwichten?
- (b) Schets drie faselijnen voor  $a \in -2, 0, 3$ .
- (c) Neem nu een tijdsafhankelijke parameter  $a(t) = 3 \cos\left(\frac{2\pi t}{30}\right)$ . Merk op dat  $a$  langzaam variëert. Neem  $x(0) = 2$  en schets de oplossing  $x(t)$  voor  $t \in [0, 60]$ .

Z.O.Z.

### Opgaven Numerieke Wiskunde

Opgave 5. Met behulp van de trapeziumregel voor het integreren van de functie

$$f(x) = 2e^{-x-x^2} + (3e^{-2} - 1)x^2$$

op het interval  $[0, 1]$ , d.w.z.,

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

vinden we numerieke waarden  $I(h)$  bij stapgrootte  $h$  als in de volgende tabel:

$h$	numerieke waarde $I(h)$
0.5000	0.817286388000510
0.2500	0.816212596855330
0.1250	0.816148425997833
0.0625	0.816144458517675

- (a) Wat is de uitdrukking voor het conditiegetal van het probleem: "bereken de waarde van de functie  $f$  in een bepaald punt  $x$ "? Bereken dit conditiegetal indien  $x = 1/2$ .
- (b) Bepaal uit de gegevens de orde van dit numerieke proces, m.a.w. bepaal de waarde van  $p$  in de relatie

$$I(h) = I + a_p h^p + O(h^{p+1}).$$

- (c) Bepaal door één keer te extrapoleren een verbeterde benadering van  $I$ , inclusief foutschatting.