

Vak : **Tentamen Calculus I - CT, TN, TW, WB**
Vakcode : 152026
Datum : 9 oktober 1996
Tijdstip : 9.00-12.00 uur
Plaats : sportcentrum

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden

1. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ geldt

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)}.$$

2. (a) Formuleer de Middelwaardestelling.
(b) Bewijs de Middelwaardestelling, m.b.v. de stelling van Rolle.

3. Bepaal met behulp van Taylorontwikkelingen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(3x) + 2e^x - \ln(1+5x) + 3x - 3}{x^2}.$$

4. (a) Formuleer de stelling van Taylor.
(Geef hierbij tevens expliciet de gedaante van de restterm.)
(b) We willen $\sqrt[3]{126}$ benaderen. We schrijven daartoe

$$\sqrt[3]{126} = 5 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{125}} = f\left(\frac{1}{125}\right), \quad \text{met } f(x) = 5\sqrt[3]{1+x}.$$

1. Bepaal met behulp van de eerste orde Taylorpolynoom van f een benadering α van $\sqrt[3]{126}$.
2. Geef m.b.v. de restterm $r_1(x)$ een afschatting voor $|\sqrt[3]{126} - \alpha|$.

5. (a) Bepaal

$$\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - 3x^2 + 3x} dx.$$

- (b) Bereken

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx.$$

6. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^3 + 3x_1^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Bewijs dat f overal continu is.
- (b) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$.
- (c) Is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

Normering:

1 : 4	2 a : 2 b : 2	3 : 4	4 a : 2 b1 : 2 b2 : 2	5 a : 4 b : 4	6 a : 2 b : 2 c : 2
-------	------------------	-------	-----------------------------	------------------	---------------------------

Totaal: 36 + 4 = 40 punten