

Vak : **Calculus I voor TW**
Vakcode : 152026
Datum : vrijdag 27 november 1998
Tijdstip : 9.00 - 12.00 uur
Plaats : TW-A-101

**Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.**

1. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ geldt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. (a) Formuleer de insluitstelling voor limieten van rijen.

(b) Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{(n-1)(n+1)}\right)^{n+1}$.

(Aanwijzing: voor $n \geq 2$ geldt $\frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{(n-1)(n+1)} \leq \frac{1}{n-1}$)

3. Gegeven is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{als } x \leq 1 \\ 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 & \text{als } x > 1 \end{cases}$$

(a) Ga na of f continu is op \mathbb{R} .

(b) Ga na of f differentieerbaar is op $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) Bepaal $f'_r(1)$ en $f'_l(1)$ m.b.v. de definitie en ga na of f differentieerbaar is in het punt $x = 1$.

4. Bereken met behulp van standaard Taylor-ontwikkelingen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos(x) - 2 \ln(1+x)}{x^2}$$

Z.O.Z.

5. (a) Bepaal $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx$ ($x > 0$).
- (b) i. Bepaal $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$.
- ii. Bereken ingeval van convergentie $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$.
- (c) Bereken $\frac{d}{dx} \int_e^{e^x} \frac{1}{\ln t} dt$ ($x > 0$).

6. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3x_1^2 x_2^2 - 4x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} & (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

- (a) Bewijs dat f continu is op \mathbb{R}^2 .
- (b) Geef de definitie van: f is differentieerbaar in 0 ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).
- (c) Onderzoek of f differentieerbaar is op \mathbb{R}^2 .

Normering:

1	a : 4	2	a : 2 b : 3	3	a : 2 b : 2 c : 3	4	: 4	5	a : 3 b1 : 2 b2 : 1 c : 3	6	a : 3 b : 2 c : 2
---	-------	---	----------------	---	-------------------------	---	-----	---	------------------------------------	---	-------------------------

Totaal: 36 + 4 = 40 punten