Toets Stochastic Models (theorie)
Maandag 22 mei 2017 van 8.45 - 11.45 uur

Onderdeel van de modules:
- Modelling and analysis of stochastic processes for MATH (201400434)
- Modelling and analysis of stochastic processes for IEM (201400062)

Docenten: W.R.W. Scheinhardt, R.J. Boucherie, J.T. Timmer
Coordinator: W.R.W. Scheinhardt

- Dit tentamen bestaat uit **vier opgaven**
- Beantwoord de opgaven 1 en 2 enerzijds, en de opgaven 3 en 4 anderzijds op **aparte vellen papier**
- Zet naam en studentnummer op **ieder vel** dat u inlevert
- Boeken, aantekeningen, etc. zijn **niet** toegestaan
- Gewone rekenmachine is toegestaan, maar **geen** grafische rekenmachine
- **Motiveer** alle antwoorden

Puntenverdeling: totaal 90 punten. Cijfer = 1 + behaald aantal punten / 10

Opgave 1. (25 punten)
Schoenenwinkel B.Oot is altijd geopend en beschikt over twee robots (bedienden) die altijd beschikbaar zijn. Robot M.An is specialiseerd in herenschoenen en robot V.Rouw in damesschoenen. De robots zijn zo goed gekwalificeerd, dat klanten van heinde en verre naar B.Oot komen. B.Oot probeert de bediening zo in te richten dat heren door M.An en dames door V.Rouw worden geholpen. Klanten wachten op hun beurt, waarbij aparte wachtrijen voor heren en dames worden gevormd (uiteraard met een nummertjessysteem, waarbij klanten zelf een kopje verse muntthee of kopje koffie kunnen tappen uit de automaat met kokend water en verse bonenkoffie). Echter, indien de wachtrij voor dames geen klanten bevat, dan zal V.Rouw de heer die vooraan in de herenwachtrij staat bedienen; indien er geen heer in de wachtrij voor heren staat, dan zal M.An een dame die vooraan in de dameswachtrij staat bedienen. Indien M.An een dame bedient en tijdens de bediening een heer binnenkomt zal M.An zich bij de dame verontschuldigen en de heer gaan bedienen. De dame wacht dan vooraan in de rij tot V.Rouw de huidige bediening afrondt en vervolgens als eerste aan de beurt is. Dit gaat zonder invloed op de resterende bedieningsduur. Evenzo, indien

V.Rouw een heer bedient en een dame binnenkomt zal V.Rouw zich bij de heer verontschuldigen en vervolgens de dame gaan bedienen. De heer sluit vooraan aan in de herenwachtrij en wordt zonder invloed op de resterende bedieningsduur bediend door M.An nadat deze de bediening van de huidige heer afrondt.

Na zorgvuldige analyse van de data betreffende aantallen binnenkomende klanten en lengte van de tijd die nodig is om een heer of dame een paar schoenen aan te meten is gebleken dat dames aankomen volgens een Poisson proces met intensiteit van 2 dames per uur en heren aankomen volgens een Poisson proces met intensiteit 1 heer per uur. De bedieningsduren voor dames blijken exponentieel verdeeld met gemiddelde 40 minuten en die van heren exponentieel verdeeld met gemiddelde 30 minuten, waarbij bediening door M.An of V.Rouw geen invloed heeft op de bedieningsduurverdeling.

(a) Is het redelijk te veronderstellen dat een heer waarvan de bediening door V.Rouw is onderbroken later door M.An wordt bediend zonder invloed op de resterende bedieningsduur?

(b) Indien M.An en V.Rouw respectievelijk een heer en dame aan het bedienen zijn, wat is dan de kansverdeling van de tijd tot de eerste robot klaar is met bediening?

(c) Teken het transitiediagram van de Markov keten die de evolutie van het aantal heren en dames in schoenenwinkel B.Oot beschrijft en stel de balansvergelijkingen op.

(d) Is het systeem stabiel? Motiveer uw antwoord.

Bij de volgende vragen mag het antwoord worden uitgedrukt in de evenwichtsverdeling van het aantal heren en dames in het systeem; deze verdeling hoeft dus niet te worden bepaald. Neem $P(h, d)$ voor de kans op h heren en d dames in het systeem.

(e) Bepaal het gemiddelde aantal heren in het systeem, en bepaal tevens het gemiddelde aantal heren dat staat te wachten.

(f) Wat is de fractie van de tijd dat M.An respectievelijk V.Rouw aan het werk zijn?

(g) Bepaal de gemiddelde lengte van een aaneengesloten periode waarin beide robots tegelijk niets te doen hebben.

Opgave 2. (25 punten)
Beschouw de Markov keten met 4 toestanden en overgangskansen p_{ij} van toestand i naar toestand j als volgt:

$$p_{12} = 1 \quad p_{21} = \frac{1}{2} \quad p_{23} = \frac{1}{2} \quad p_{34} = 1 \quad p_{43} = \frac{1}{3} \quad p_{41} = \frac{2}{3}$$

(a) Bepaal de stationaire kansverdeling van deze Markov keten.

(b) Bepaal het verwachte aantal overgangen dat nodig is om vanuit toestand 1 voor het eerst toestand 1 opnieuw te bereiken.

Beschouw de Markov keten nu als de routeringsmatrix van een gesloten netwerk van wachtrijen, dus een klant die wachtrij i verlaat gaat met kans p_{ij} naar wachtrij j. We spreken nu van stations in plaats van toestanden. Ieder station bezit 1 server, en iedere aankomende klant kan worden opgenomen in de wachtrij. Bij alle stations is de bediening FIFO (First In First Out). De bedieningsduren bij de stations zijn exponentieel verdeeld, en de verwachte bedieningsduren in de vier stations zijn respectievelijk: $1/\mu_1 = 4$, $1/\mu_2 = 3$, $1/\mu_3 = 2$ en $1/\mu_4 = 1$. Het netwerk is dus een gesloten netwerk van wachtrijen.

(c) Bepaal voor het netwerk met $m = 1$ en het netwerk met $m = 2$ klanten de simultane kans dat er (n_1, n_2, n_3, n_4) klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations. Het is niet nodig om expliciet de normeringsconstante te bepalen. Geef hiervoor wel de formule.

(d) Geef voor het netwerk met $m = 2$ klanten de simultane kans dat er (n_1, n_2, n_3, n_4) klanten aanwezig zijn bij de verschillende stations op het moment dat een klant arriveert bij station 1.

(e) Bepaal m.b.v. Mean Value Analyse het verwachte aantal klanten en de verwachte verblijftijd in de vier stations voor een netwerk met $m = 1$ klant en voor een netwerk met $m = 2$ klanten.

(f) Voor het netwerk met $m = 2$ klanten: bepaal de gemiddelde tijd die een klant nodig heeft tussen aankomst bij station 1 en de eerstvolgende aankomst bij station 1.

Opgave 3. (20 punten)
A. Zwart en B. Wit zijn twee fanatieke dammers. Ze besluiten een duel te houden om te bepalen wie de beste dammer is. Dit gaat als volgt. Ze dammen tweemaal tegen elkaar. Een gewonnen partij levert 1 punt op, remise (gelijkspel) 0,5 punt en verlies 0 punten. Na twee partijen wordt gekeken wie de meeste punten heeft; diegene is de winnaar. Als er na twee partijen geen winnaar is, wordt er een extra, derde, partij gespeeld. Hopelijk volgt hier een winnaar uit.

Dammer Zwart heeft twee tactieken, namelijk 'aanvallend' en 'verdedigend' dammen. Als hij aanvallend damt, dan heeft hij 40% kans om te winnen en 60% kans om te verliezen van zijn tegenstander. Als hij verdedigend damt, dan heeft hij 80% kans op remise en 20% kans om te verliezen. Zijn doel is om zijn winstkans te maximaliseren.

(a) Formuleer dit probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Definieer de fasen, toestanden, beslissingen en waardefunctie.

(b) Formuleer de recurrente betrekkingen.

(c) Bepaal de optimale winstkans.

(d) Geef de optimale strategie in een 'policy table'.

Opgave 4. (20 punten)
Een fietsenmaker richt zich op de verkoop van luxe fietsen. De zaak draait al geruime tijd, en de eigenaar heeft een goed beeld van de markt en potentiële klanten.

De eigenaar vindt dat reclame maken noodzakelijk is om de verkoop van de fietsen te stimuleren. Elke maand wordt er dan ook besloten om veel of weinig reclame te maken. Deze keuze beïnvloedt de verkoop van fietsen deze maand. De verkoopaantallen zijn goed (40 fietsen per maand) of slecht (30 fietsen per maand). Als er veel reclame wordt gemaakt, zijn de kansen op goede of slechte verkopen als volgt afhankelijk van de verkopen van de vorige maand. Elke verkochte fiets levert dan 200 euro op.

verkopen vorige maand	verkopen deze maand	
	goed	slecht
goed	0,90	0,10
slecht	0,40	0,60

Bij weinig reclame levert elke verkochte fiets 210 euro op. De kansen zijn dan als volgt.

verkopen vorige maand	verkopen deze maand	
	goed	slecht
goed	0,70	0,30
slecht	0,30	0,70

De fietsenmaker heeft als doel de verwachte verdisconteerde winst te maximaliseren. Gebruik verdisconteringsfactor 90%.

(a) Modelleer dit probleem als een Markov beslissingsprobleem.

(b) Formuleer de bijbehorende optimaliteitsvergelijkingen.

(c) Voer twee iteraties uit van het waarde-iteratie algoritme: gebruik $V_0(s) = 0$ voor elke toestand s en bepaal $V_1(s)$ en $V_2(s)$.

(d) De huidige politiek van de fietsenmaker is om altijd veel reclame te maken. Bepaal de verwachte verdisconteerde winst van deze politiek.

(e) Beschrijf hoe het politiek-iteratie algoritme gebruikt kan worden om na te gaan of de politiek in onderdeel (d) optimaal is. (U hoeft dit <u>niet</u> uit te voeren.)