

Kenmerk : TW2005/DWMP/17/ha
Datum : 21 januari 2005

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT/TEL**
Vakcode : 152161
Datum : 21 januari 2005
Tijdstip : 9.00-12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Een *woord* is een rijtje van tenminste één letter uit het alfabet A, B, \dots, Z . De *lengte* van een woord is het aantal letters waaruit het is opgebouwd. Bij onderdeel (a) t/m (d) beschouwen we woorden van lengte 10, waarbij de volgorde van de letters van belang is, d.w.z.: $AAEEEMXZRP$ en $PEXAEZREMA$ zijn *verschillende* woorden (hoewel ze uit dezelfde letters zijn opgebouwd).

- (a) [1 pt] Bepaal het aantal woorden van lengte 10.
- (b) [1 pt] Bepaal het aantal woorden van lengte 10, bestaande uit 10 *verschillende* letters (bijv: $ASFGTHKPLR$ bestaat uit 10 verschillende letters, maar $RGHKUNFGAE$ niet).
- (c) [1 pt] Bepaal het aantal woorden van lengte 10, waarbij geen gelijke letters naast elkaar staan (bijv: $AGTHATGHYK$ voldoet, maar $AGTHATGGYK$ niet).
- (d) [2 pt] Bepaal het aantal woorden van lengte 10 opgebouwd uit 7 verschillende letters, waarvan precies 2 A 's en precies 3 E 's (bijv: $AHKEELANEC$).

Bij onderdeel (e) en (f) beschouwen we woorden van lengte 10, waarbij de volgorde van de letters *niet* van belang is, d.w.z.: $AAEEEMXZRP$ en $PEXAEZREMA$ zijn *dezelfde* woorden.

- (e) [3 pt] Bepaal het aantal woorden van lengte 10.
- (f) [2 pt] Bepaal het aantal woorden van lengte 10 bestaande uit minstens 2 A 's en minstens 3 E 's.

2. (a) [3 pt] Onderzoek met behulp van een waarheidstabel of de volgende formule een tautologie is:

$$((p \vee \neg q) \wedge (p \rightarrow r)) \vee (\neg q \rightarrow r).$$

(b) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic" en de "Rules of Inference":

$$\begin{array}{l} q \\ \neg q \vee p \\ \hline (p \vee r) \rightarrow s \\ \hline \therefore (s \wedge r) \vee (s \wedge p) \end{array}$$

Z.O.Z

3. (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de “Laws of Logic”, de “Rules of Inference” en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x [\neg p(x) \vee q(x)] \\ \exists x p(x) \\ \forall x [q(x) \rightarrow r(x)] \\ \forall x [s(x) \vee \neg r(x)] \end{array}}{\therefore \exists x s(x)}$$

- (b) [2 pt] Toon m.b.v. een tegenvoorbeeld aan dat het volgende argument *ongeldig* is:

$$\frac{\forall x [p(x) \vee q(x)]}{\therefore \forall x p(x) \vee \forall x q(x)}$$

4. (a) [3 pt] De verzamelingen A en B in het universum $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ zijn gegeven door:

$$A = [-3, -1) \cup (1, 3) \text{ en } B = (-2, 2].$$

Bepaal de verzamelingen \overline{A} , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ en $A \triangle B$. Schrijf het antwoord steeds als vereniging van een minimaal aantal disjuncte intervallen.

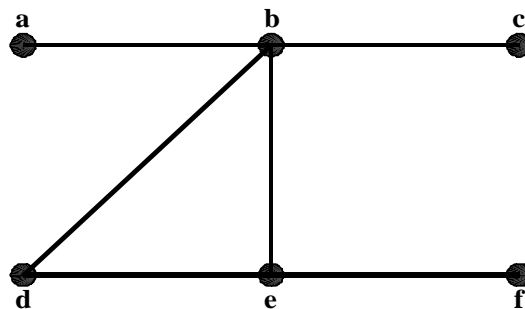
- (b) [2 pt] Laat C en D twee verzamelingen zijn in een universum \mathcal{U} . Toon aan dat $\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(C \cap D)$.

5. (a) [4 pt] Bewijs met behulp van het principe van wiskundige inductie dat voor

$$\text{alle } n \geq 3 \text{ geldt: } \sum_{i=3}^n \frac{1}{i(i-1)(i-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)}.$$

- (b) [2 pt] Geef een recursieve definitie van de rij $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ gegeven door: $a_n = 2^n + n$.

6. Beschouw onderstaande graaf G .



Figuur 1: De graaf G

- (a) [2 pt] Bepaal in de graaf G een wandeling (*walk*) van a naar c die geen route (*trail*) is en een route van a naar c die geen pad is.

- (b) [2 pt] Hoeveel lijnen moeten minimaal aan de graaf G worden toegevoegd wil deze een Eulercircuit hebben? Geef zo'n minimaal aantal lijnen.
- (c) [3 pt] Bepaal de chromatische polynoom van G .
- (d) [1 pt] Bepaal het chromatisch getal van G .

7. (a) [2 pt] Schrijf de volgende formule in Poolse notatie: $(a - 2c)^2 - \frac{b + 4}{c^2 + 2}$.
- (b) [2 pt] Gegeven is de volgende formule in Poolse notatie:

$$+ / - * 3 a \uparrow b 2 + b c \uparrow - - * 2 a b c 3$$

Bereken de waarde van deze formule als $a = 1$, $b = -2$ en $c = 3$.

Totaal: $45 + 5 = 50$ punten