Kenmerk : TW2006/DWMP/42/ha
Datum : 31 oktober 2006

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT/TEL**
Vakcode : 152161
Datum : 3 november 2006
Tijdstip : 9.00-12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Op hoeveel manieren kunnen 8 ballen worden verdeeld over 12 bakken als:

   (a) [1 pt] Alle ballen verschillend zijn en alle bakken verschillend zijn?

   (b) [1 pt] Alle ballen verschillend zijn, alle bakken verschillend zijn en er in elke bak hoogstens één bal mag?

   (c) [1 pt] Alle ballen identiek zijn, alle bakken verschillend zijn en er in elke bak hoogstens één bal mag?

   (d) [1 pt] Alle ballen identiek zijn, alle bakken verschillend zijn en er meerdere ballen in één bak mogen?

   (e) [1 pt] Alle ballen verschillend zijn, alle bakken identiek zijn en er in elke bak hoogstens één bal mag?

   (f) [2 pt] Alle ballen verschillend zijn, alle bakken identiek zijn en er meerdere ballen in één bak mogen?

2. (a) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic" en de "Rules of Inference".

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \neg(r \vee s) \\ \underline{p \vee s \qquad\quad} \\ \therefore \neg q \end{array}$$

   (b) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\begin{array}{l} \forall x\ [\neg p(x) \vee q(x)] \\ \exists x\ p(x) \\ \forall x\ [q(x) \to r(x)] \\ \underline{\forall x\ [s(x) \vee \neg r(x)]} \\ \therefore \exists x\ s(x) \end{array}$$

3. (a) [2 pt] De verzamelingen A en B in het universum $\mathcal{U} = Z$ zijn gegeven door:
   $A = \{\, x \in \mathcal{U} \mid x^2 < 5 \,\}$ en $B = \{\, x \in \mathcal{U} \mid x > 0 \,\}$.
   Bepaal $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$ en $\overline{B - A}$.

   (b) [2 pt] Laat C en D twee verzamelingen zijn in een universum $\mathcal{U}$.
   Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende bewering:

$$\mathcal{P}(C) \cup \mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(C \cup D).$$

z.o.z

4. [4 pt]
   Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \geq 1$ geldt: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

5. De verzamelingen A en B zijn gegeven door: $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$; $B = \{1, \ldots, m\}$. Hierbij is $m \in N$, $m \geq 1$.

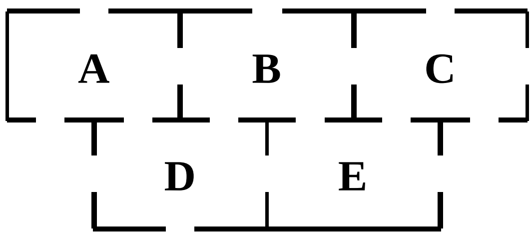
   (a) [2 pt] Bepaal het aantal relaties van A naar B en het aantal functies van A naar B.

   (b) [1 pt] Neem $m = 4$. Geef een voorbeeld van een relatie van A naar B die geen functie is.

   (c) [3 pt] Bepaal het aantal injectieve functies van A naar B en het aantal surjectieve functies van A naar B.

   (d) [1 pt] Geef een voorbeeld van een functie van A naar B die niet injectief is en ook niet surjectief is (u mag zelf een waarde voor m kiezen).

6. [3 pt]
   Beschouw de vijf kamers A t/m E in Figuur 1. De openingen stellen deuren voor. Onderzoek of er een wandeling bestaat die *precies* éénmaal door *elke* deur gaat. (het beginpunt van de wandeling hoeft niet hetzelfde te zijn als het eindpunt)



Figuur 1: De kamers A t/m E

7. [4 pt]
   Van een boom T zijn de volgende gegevens bekend. T heeft precies vijf punten van graad 3 en precies drie punten van graad 4. T heeft geen punten van graad 5 of hoger. Het aantal punten van graad 2 is onbekend, evenals het totaal aantal punten van T.
   Bepaal het aantal punten van graad 1.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten