Kenmerk : TW2011/DWMP/112/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT**
Vakcode : 191521610 (TW); 191521611 (INF/BIT)
Datum : 21 januari 2011
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Gegeven zijn 15 personen en drie verschillende taken A, B, C. De taken moeten worden toegewezen aan de personen, waarbij een taak aan meerdere personen mag worden toegewezen. Bijvoorbeeld: persoon 1 krijgt taak B, persoon 2 taak C, persoon 3 taak B, persoon 4 taak A, etc.
   Op hoeveel manieren kunnen de taken worden toegewezen aan de personen als:

   (a) [1 pt] elke persoon precies één taak toegewezen krijgt?

   (b) [1 pt] personen ook nul of meerdere taken toegewezen kunnen krijgen?

   (c) [3 pt] elke persoon minstens één taak toegewezen krijgt èn elke taak aan minstens één persoon wordt toegewezen?

2. (a) [2 pt] Laat $n \in$ N. Bereken $\binom{n}{0}2^n - \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$.
   Hint: gebruik de Binomiaalstelling (*Binomial Theorem*).

   (b) [2 pt] Bepaal de waarde van "*teller*" na executie van het volgende programma:

```
Teller := 0
for i = 1 to 25 do
  for j = i to 25 do
    for k = j to 25 do
      Teller := Teller + 1
```

3. (a) [3 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":

$$((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r).$$

   (b) [3 pt] Bewijs regel R11, met behulp van de overige "Laws of Logic" en "Rules of Inference".

   (c) [2 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende argument:

$$\begin{array}{l} \exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \\ \forall x\,[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \neg\forall x\,[\neg p(x) \vee r(x)] \\ \hline \therefore\ \forall x\ [p(x) \rightarrow \neg r(x)] \end{array}$$

Z.O.Z

4. (a) [2 pt] Laat $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{1, 2, 4\}$. Bepaal $\mathcal{P}(A)\Delta\mathcal{P}(B)$.

(b) [2 pt] C, D en E zijn verzamelingen in een universum $\mathcal{U}$. Bewijs dat

$$C - (D \cap E) = (C - D) \cup (C - E).$$

(NB: een Venn-diagram geldt niet als bewijs)

5. [4 pt]
Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \geq 8$ geldt: n is te schrijven als som van drieën en vijven.
(Ofwel: voor alle $n \geq 8$ geldt: er bestaan $p, q \in N$ zo dat $n = 3p + 5q$)

6. Laat $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ (= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\})$.
De relatie R op X wordt gegeven door: $(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1 y_2 = x_2 y_1$.

(a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op R.

(b) [1 pt] Beschrijf de equivalentieklassen van R; teken enkele equivalentieklassen in het xy-vlak.

(c) [1 pt] Is R ook een equivalentierelatie op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

7 ~~6~~. [4 pt]
Gegeven is een zelf-complementaire graaf G, d.w.z.: G is isomorf met $\overline{G}$.
Bewijs dat G samenhangend is.

8 ~~7~~. [3 pt]
Van een boom T zijn de volgende gegevens bekend. T heeft precies 101 punten van graad 1, acht punten van graad 3 en twintig van graad 4. T heeft geen punten van graad 6 of hoger. Bepaal het aantal punten van graad 5.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten