Uitwerkingen Tentamen Discrete Wiskunde I (152161) 03-11-2006

1. a. Voor elke bal kan gekozen worden uit 12 verschillende bakken.
Dus het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan: $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdots \cdot 12 = 12^8$.

b. Kies 8 bakken van de 12 waar de 8 ballen in moeten.
De 8 ballen kunnen dan nog op 8! manieren in deze bakken worden gedaan.
Dus het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan: $\binom{12}{8} \cdot 8! = \frac{12!}{4!}$.

c. Kies 8 bakken van de 12 waar de 8 ballen in moeten.
Dus het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan: $\binom{12}{8}$.

d. Stel de ballen voor als 8 symbolen “X” en onderscheid de 12 bakken door 11 scheidingstekens “|”. Het aantal verdelingen van de ballen over de bakken is dan equivalent met het aantal ordeningen van deze 8+11=19 symbolen.
Dus het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan: $\binom{19}{8}$.

e. Omdat de bakken identiek zijn en er niet meer dan één bal in een bak mag, kunnen oplossingen nu niet meer onderscheiden worden.
Dus het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan: 1.

f. Het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan:
Aantal manieren om 8 ballen te verdelen over 1 bak +
+ aantal manieren om 8 ballen te verdelen over 2 identieke bakken, zonder dat er een bak leeg blijft +
+ aantal manieren om 8 ballen te verdelen over 3 identieke bakken, zonder dat er een bak leeg blijft + $\cdots\cdots$
+ aantal manieren om 8 ballen te verdelen over 12 identieke bakken, zonder dat er een bak leeg blijft.
Dus het aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan:

$$S(8,1) + S(8,2) + S(8,3) + \cdots + S(8,12) = \sum_{k=1}^{12} S(8,k).$$

Omdat het aantal manieren om 8 ballen te verdelen over meer dan 8 verschillende bakken zonder dat er een bak leeg blijft, gelijk is aan nul, kunnen we bovenstaande uitkomst vereenvoudigen tot: $\sum_{k=1}^{8} S(8,k)$.

2. a.

Stapnr	Bewering	Stapnrs, Laws en Rules
1	$\neg(r \vee s)$	Premisse
2	$\neg r \wedge \neg s$	1, L2
3	$p \vee s$	Premisse
4	$s \vee p$	3, L3
5	$\neg s \wedge \neg r$	2, L3
6	$\neg s$	5, R7
7	p	4, 6, R5
8	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisse
9	$q \rightarrow r$	7, 8, R1

10	$\neg r$	2, R7
11	$\therefore \neg q$	9, 10, R3

b.

Stapnr	**Bewering**	**Stapnrs, Laws en Rules**
1	$\exists x\, p(x)$	Premisse
2	$p(c)$ voor zekere $c \in U$	1, U2
3	$\forall x\big(\neg p(x) \vee q(x)\big)$	Premisse
4	$\neg p(c) \vee q(c)$ voor de c uit 2	3, U1
5	$\neg\neg p(c)$	2, L1
6	$q(c)$	4, 5, R3
7	$\forall x\big(q(x) \to r(x)\big)$	Premisse
8	$q(c) \to r(c)$ voor de c uit 2	7, U1
9	$r(c)$	6, 8, R1
10	$\forall x\big(s(x) \vee \neg r(x)\big)$	Premisse
11	$s(c) \vee \neg r(c)$ voor de c uit 2	10, U1
12	$\neg r(c) \vee s(c)$	11, L3
13	$\neg\neg r(c)$	9, L1
14	$s(c)$	12, 13, R5
15	$\therefore \exists x\, s(x)$	14, U4

.

3. a. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Dus:
$A \cap B = \{1, 2\}$; $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $A \Delta B = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5, \ldots\}$;
$A - B = \{-2, -1, 0\}$, dus: $\overline{A - B} = \{\cdots -5, -4, -3, 1, 2, 3, \ldots\}$.

b. Tegenvoorbeeld: $C = \{1\}$ en $D = \{2\}$.
Dan: $C \cup D = \{1, 2\}$, dus $\{1, 2\} \in P(C \cup D)$.
Maar: $P(C) = \{\varnothing, \{1\}\}$ en $P(D) = \{\varnothing, \{2\}\}$, dus $\{1, 2\} \notin P(C) \cup P(D)$.
.

4. Te bewijzen: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$ voor alle $n \geq 1$.

Bewijs m.b.v. mathematische inductie:
<u>Inductiebasis</u> voor n = 1:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{1} (2i-1)^3 = (2-1)^3 = 1 \\ 2 \cdot 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \text{ Klopt!}$$

<u>Inductiehypothese</u>: Stel $\sum_{i=1}^{k} (2i-1)^3 = 2k^4 - k^2$ voor <u>een zekere</u> $k \geq 1$.

We moeten nu aantonen dat dan ook: $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1)^3 = 2(k+1)^4 - (k+1)$ (**).

Uitwerking linkerlid: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^3 = \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^3 + (2(k+1)-1)^3$.

Volgens de inductiehypothese is dit gelijk aan: $2k^4 - k^2 + (2(k+1)-1)^3$.

Na haakjes uitwerken is dit gelijk aan: $2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$.

Uitwerking rechterlid: $2(k+1)^4 - (k+1) = 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$.

Linker- en rechterlid van (**) zijn dus gelijk, dus uit het principe van mathematische inductie volgt nu dat: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$ voor alle $n \geq 1$.

5. a. Het aantal relaties van A naar B is gelijk aan $|A \times B| = 26m$.

Het aantal functies van A naar B is gelijk aan $|B|^{|A|} = m^{26}$.

b. Bijvoorbeeld: $\{(a,1),(a,2)\}$.

c. Het aantal injectieve functies van A naar B is gelijk aan:

$$\begin{cases} 0 & \text{als} \quad m < 26 \\ \dfrac{|\mathrm{B}|!}{(|B|-|A|)!} = \dfrac{m!}{(m-26)!} & \text{als} \quad m \geq 26 \end{cases}$$

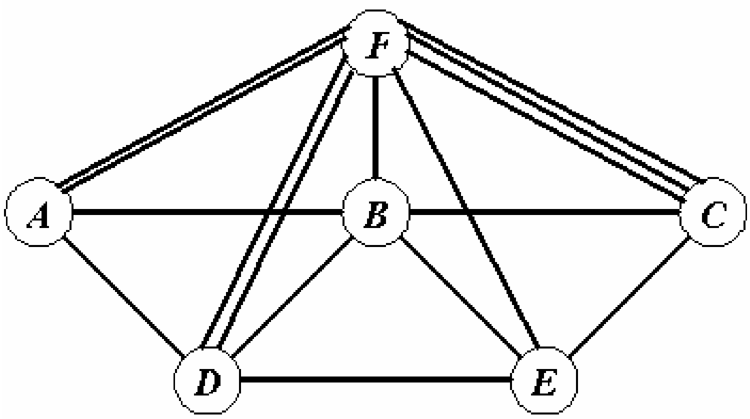
Het aantal surjectieve functies van A naar B is gelijk aan:

$$\begin{cases} 0 & \text{als} \quad m > 26 \\ \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{m-k}(m-k)^{26} & \text{als} \quad m \leq 26 \end{cases}$$

d. Bijvoorbeeld bij $m = 2$ de functie $\{(a,1),(b,1),(c,1),\ldots,(z,1)\}$.

.

6. Het probleem kan gemodelleerd worden met onderstaande multigraaf met punten A t/m F (F is het "buitengebied"), en een lijn tussen twee punten voor elke deur die de corresponderende kamers verbindt.



Het probleem komt dan neer op het vinden van een Eulerroute in de multigraaf. De multigraaf heeft echter meer dan twee punten van oneven graad (nl. de punten B, C, D en F). Dus de multigraaf heeft geen Eulerroute.

Conclusie: de gevraagde wandeling bestaat niet.

7. Laat $T = (V, E)$, met $|V| = n$ en $k_i =$ aantal punten van graad i $(1 \leq i \leq 4)$.
Dan geldt: $k_1 + k_2 + 5 + 3 = n$, ofwel: $k_1 + k_2 = n - 8$ (1)
Ook geldt: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ en $|E| = n - 1$ (want T is een boom).
Dus: $k_1 + 2k_2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 2(n-1)$, ofwel: $k_1 + 2k_2 = 2n - 29$ (2) .
Vergelijking (1) met 2 vermenigvuldigen en dan vergelijking (2) ervan aftrekken levert: $k_1 = -16 + 29 = 13$. T heeft dus precies 13 punten van graad 1.